Ch: 1 : First order :

- $y' + 2y = 0 \rightarrow$ 1st order
- $y'' + 2y' + 3 = 0 \rightarrow$ 2nd order
- ⋮

$y' + 2y = 0 \rightarrow$ homogenous equation

$y' + 2y = R(x) \rightarrow$ NoN homogenous eq.

CH: 1

- ~~Separable~~ Separable
- NON-separable
- exact
- NoN-exact (Integrating Factor)
- Linear
- Bernoulli

I Seperable : $y' = F(x,y)$

← كيف نعرف ان Seperable ؟ اذا قدرنا نفصل dx عن dy , dy عن dx

Ex : $y'y = x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} y = x^2 \rightarrow \int dy\, y = \int x^2 dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c$

$\rightarrow y = \sqrt{2}\sqrt{\frac{x^3}{3} + c}$.

(c) نقدر نحدد قيمة I.V.P

Ex : Solve : $(xy - 2x)dx - (xy + y)dy = 0$, $y(0) = 3 \rightarrow \overset{x=0}{y=3}$

$x(y-2)dx - y(x+1)dy = 0$

$x(y-2)dx = y(x+1)dy$

$\frac{x}{x+1} dx = \frac{y}{y-2} dy \rightarrow \frac{x+1-1}{x+1} dx = \frac{y-2+2}{y-2} dy$

$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(1 + \frac{2}{y-2}\right)dy \rightarrow x - \ln|x+1| + c = y + 2\ln|y-2| + c$

$x - \ln|x+1| + c^* = y + 2\ln|y-2|$

~~$y + 2\ln|y-2| = x - \ln|x+1| + c$~~

~~Use I.V.P $\rightarrow 3 + 2\ln|1| = 0 - \ln|0| + c \rightarrow c =$~~

Use I.V.P $\rightarrow 0 - \ln|0+1| + c^* = 3 + 2\ln|3-2|$

$c^* = 3$

Implicit solution $\rightarrow x - \ln|x+1| + 3 = y + 2\ln|y-2|$ (1)

Scanned by CamScanner

EX Solve $e^{x-y^3}dx + \frac{3y^2}{x}dy = 0$

$$\frac{e^x}{e^{y^3}}dx + \frac{3y^2}{x}dy = 0 \longrightarrow \underbrace{x e^x dx}_{\text{By parts}} = \underbrace{-3y^2 e^{y^3} dy}_{\text{Substitution}}$$

⋮

EX $(xy + 3x + 2y + 6)dx + (x^2y^2 + 4y^2 + 4x^2 + 16)dy = 0$

تحليل بالتجميع

$$(y+3)(x+2)dx + (y^2+4)(x^2+4)dy = 0$$

$$\underbrace{\frac{(x+2)}{(x^2+4)}}_{\text{partial fraction}}dx = \underbrace{\frac{-(y^2+4)}{(y+3)}}_{\text{partial fraction}}dy$$

⋮

EX $y' \sin 2\pi x = \pi y \cos 2\pi x$

$$\frac{dy}{dx}\sin 2\pi x = \pi y \cos 2\pi x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\pi \cos 2\pi x}{\sin 2\pi x}dx \longrightarrow \ln|y| = \underbrace{\pi \ln|\sin 2\pi x|}_{\frac{2}{2\pi}} + C$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\cdot \ln|\sin 2\pi x| + C} = e^{\frac{1}{2}\cdot \ln|\sin 2\pi x|} \cdot e^C$$

$$y = \sqrt{|\sin 2\pi x|} \cdot \sqrt{C}$$

$$y = \sqrt{|\sin 2\pi x|} \cdot C^*$$

مشتقة بالقسام بالنسبة لـ Ln تكاملها

Scanned by CamScanner

2| Reduce to seperable

* كيف نعرف إنه السؤال بنحل بالطريقة هذه؟

1- إذا كانت العرفة موجود بالسؤال وهو $\left(\frac{y}{x}\right)$ أو $\left(\frac{x}{y}\right)$ مباشر بنحل R.S

2- إذا عوضنا مكانة كل x بـ (kx) ومكانة كل y بـ (ky) حيث إنه k ثابت وبعد الاختصار طلع معنا نفس السؤال بنحل R.S

3- إذا كانت عندنا مقدار مرفوع لقوة أو تحت جذر مباشرة R.S حيث إنه اللي تحت الجذر أو القوة هو العرفة.

← العرفة المستخدم بالحل هو $u=\frac{y}{x}$ ← $y=ux$ الحالة (3) هو المقدار المرفوع لقوة

EX1: $xy' = y + 3x^4 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

← كان الحالة الأولى حيث العرفة $\left(\frac{y}{x}\right)$ موجود بالسؤال

بنعوض بالسؤال:
$u=\frac{y}{x}$
$y=ux$
$y'=u'x+u$

$x(u'x+u) = ux + 3x^4\cos u$ — seperable

$ux^2+ux = ux+3x^4\cos u \rightarrow u' = 3x^2\cos u \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2\cos u$

$\int \frac{du}{\cos u} = \int 3x^2 dx \rightarrow \ln|\sec u+\tan u| + c = x^3 + c$

$e^{\ln|\sec(\frac{y}{x})+\tan(\frac{y}{x})|} = e^{x^3+c^*}$

$\sec\left(\frac{y}{x}\right)+\tan\left(\frac{y}{x}\right) = e^{x^3+c^*}$

Ex: $xy' = y + 3x^4\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, $y(1)=0$

$u=\frac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u'x+u$

$x(u'x+u) = ux + 3x^4\cos^2(u) \rightarrow u'x^2 = 3x^4\cos^2 u$

$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int 3x^2 dx \rightarrow \sec^2 u\, du = \int 3x^2 dx$

$\tan u = x^3 + c^*$ (3)

$y = x\tan^{-1}(x^3+c)$

I.V.P: $0 = \tan^{-1}(1+c)$

$\tan 0 = 1+c$

$0 = 1+c \rightarrow c=-1$

$y = x\tan^{-1}(x^3-1)$

Scanned by CamScanner

Ex 2 Solve $(2xy+3y^2)dx-(2xy+x^2)dy=0$

* لاحظ وجود $\frac{y}{x}$ فنعوض مكان x و y بـ (kx) (ky) حسب القاعدة

$$(2(kx)(ky)+3(ky)^2)dx-(2(kx)(ky)+(kx)^2)=0$$

$$k^2(2xy+3y^2)dx-k^2(2xy+x^2)dy=0$$

نقسم بالحالة لبعتنا إذا كان k

$$(2xy+3y^2)dx-(2xy+x^2)dy=0 \longrightarrow$$

$$u=\frac{y}{x},\ y=ux,\ y'=u'x+u$$

$$*\left[(2xy+3y^2)dx-(2xy+x^2)dy=0\right]\div dx$$

$$\left[(2xy+3y^2)-(2xy+x^2)\frac{dy}{dx}=0\right]$$

$$2xy+3y^2=(2xy+x^2)\frac{dy}{dx}$$

$$2x(ux)+3(ux)^2=(2x(ux)+x^2)(u'x+u)=0 \longrightarrow 2x^2u+3u^2x^2=(2x^2u+x^2)(u'x+u)=0$$

$$x^2(2u+3u^2)=[2uu'x^3+2x^2u^2+u'x^3+ux^2]=0$$

$$2u+3u^2=2uu'x+2u^2+u'x+u$$

$$(u+u^2)dx=x(2u+1)dy$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2u+1}{u+u^2}du \longrightarrow e^{Ln|x|+C^*}=e^{Ln|u+u^2|}$$

$$u^2+u=C^*x$$

$$\boxed{\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}=C^*x}$$

Scanned by CamScanner

Ex: $y' = (x+y-2)^2$, $y(0)=2$

* الحالة الثالثة عقدا مرفوعة لقوة أو تحت جيب ... نفرضه بالعقدا ونحل عادي.

$$\rightarrow \begin{cases} u = x+y-2 \\ y = u-x+2 \\ y' = u'-1 \end{cases}$$

$$u'-1 = u^2$$

$$u' = u^2+1$$

$$\frac{du}{dx} = u^2+1$$

$$dx = \frac{du}{u^2+1}$$

~~$\tan(u) = x+c$~~

~~$u = \tan(x+c)$~~

~~$u = \sqrt{\tan(x+c)}$~~

$$\tan^{-1}(u) = x+c$$

$$\because u = \tan(x+c) \rightarrow y = \tan(x+c) - x + 2$$

$$I.V.P \rightarrow 2 = \tan(0+c) - 0 + 2$$

$$\tan(c) = 0 \rightarrow \tan^{-1}\tan c = \tan^{-1}(0)$$

$$c = 0$$

$$\Rightarrow y = \tan(x) - x + 2$$

(5)

Scanned by CamScanner

3] Exact & form $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

→ IF $M_y = N_x$ → ODE is exact

M_y: مشتقة بالنسبة لـ y — N_x: مشتقة بالنسبة لـ x

→ the solution of this ODE is given by $F(x,y) = C$

$F_x = M$, $F_y = N$

* الثابت في هذا النوع ليس (C) بل اقتران بالنسبة لـ (y) أو لـ (x) حسب السؤال لكنه تقريباً كل الحل الثابت بالنسبة لـ y يساوي

Ex: Solve $\underbrace{(y^2+3yx^2)dx}_{M} + \underbrace{(x^3+2xy)dy}_{N} = 0$

$M_y = 2y+3x^2$
$N_x = 3x^2+2y$
] exact

* مشان نطلع الجواب $F(x,y)$ بتكامل اما M أو N حسب السؤال

$$F(x,y) = \int \begin{matrix} M\,dx \\ \text{or} \\ N\,dy \end{matrix}$$ ← بتكامل بالنسبة لـ dx أو dy وبالنتيجة نفس الجواب.

$$F(x,y) = \int y^2+3yx^2\,dx = y^2x + yx^3 + g(y)$$ ← Constant

* مشان الطلع يمين بشتق الجواب بالنسبة لعكس اللي كاملة كاملة إله مثلاً في المثال كاملة لـ x بشتق لـ y وبعدها بساويها للحد بالسؤال اللي اشتقيت بالنسبة إله وفي هذا السؤال هو (N)

$N = f_y = 2yx + x^3 + g'(y)$

$(x^3+2xy) = 2yx + x^3 + g'(y)$

$g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = \text{Constant}$

$F(x,y) = y^2x + yx^3 + C = C_1$

$F(x,y) = y^2x + x^3y = C^*$

(6)

Scanned by CamScanner

Ex: $y' = \frac{\sin(y) + y\sin(x)}{\cos(x) - x\cos(y)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(y) + y\sin(x)}{\cos(x) - x\cos(y)}$

$(\cos(x) - x\cos(y))dy - (\sin(y) + y\sin x)dx = 0$ → لازم نبرهن انه exact لشكل

$M_y = -\cos(x) - \sin(x)$
$N_x = -\sin(x) - \cos(x)$] Exact

→ $F(x,y) = \int (\cos(x) - x\cos y)\,dy = y\cos x - x\sin y + g(x)$

$F_x = M \longrightarrow -y\sin x - \sin(y) + g'(x) = -\sin(y) - y\sin(x)$

$g'(x) = 0 \longrightarrow g(x) = \text{constant}$

$F(x,y) = y\cos x - x\sin y + C$

Ex: Solve $(ye^{xy} - 2y^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0$

$M_y = e^{xy} + xye^{xy} - 6y^2$
$N_x = e^{xy} + xye^{xy} - 6y^2$] Exact

→ $F(x,y) = \int ye^{xy} - 2y^3\,dx \longrightarrow e^{xy} - 2xy^3 + g(y)$

→ $F_y = N$

$e^{xy} - 6xy^2 + g'(y) = xe^{xy} - 6xy^2 - 2y \longrightarrow \int g'(y) = \int -2y$

$g(y) = -y^2$

G.S: $\boxed{F(x,y) = e^{xy} - 2xy^3 - y^2 = C}$

$\boxed{f(x,y) = c}$ ✱ الجواب

لازم تساوي الجواب بـ C

Scanned by CamScanner

4] Reduce to exact

1st: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

IF $M_y \neq N_x$ not exact

لازم نحول المعادلة لـ exact

* طريقة الحل انه بنضرب المعادلة بـ Integrating Factor عشان تحولها لـ exact وبعدها بنحل exact عادي زي قبل.

→ Integrating Factor

1] $u(y) = e^{\int h(y)dy}$, $h(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$

2] $u(x) = e^{\int h(x)dx}$, $h(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

بختار $u(x)$ أو $u(y)$ حسب الأنسب للحل.

Ex: $y(y^2\cos x + 1)dx + (y^2\sin x - x + y)dy = 0$

$M_y = 3y^2\cos x + 1$, $N_x = y^2\cos x - 1$

$M_y \neq N_x$

I.F → $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{(y^2\cos x - 1) - (3y^2\cos x + 1)}{y(y^2\cos x + 1)} = \frac{-2(y^2\cos x + 1)}{y(y^2\cos x + 1)}$

$h(y) = \frac{-2}{y}$

$u(y) = e^{\int h(y)dy} = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = \left(\frac{1}{y^2}\right)$ I.F

(8)

$\frac{1}{y^2} * \left[y(y^2\cos x + 1)dx + (y^2\sin x - x + y)dy = 0 \right]$

Scanned by CamScanner

$$\left(y\cos x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\sin x-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy=0$$

$M_y = \cos x - \frac{1}{y^2}$

$N_x = \cos x - \frac{1}{y^2}$ ⟹ Exact → دي تامة

Ex $y(2x^2-xy+1)dx+(x-y)dy=0$

$M_y = 2x^2-2xy+1,\quad N_x = 1$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{(2x^2-2xy+1)-(1)}{x-y}=\frac{2x(x-y)}{(x-y)}=2x=h(x)$$

$$u(x)=e^{\int h(x)dx}=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$$

$$e^{x^2}*\left[y(2x^2-xy+1)dx+(x-y)dy=0\right]$$

$$\left(ye^{x^2}2x^2-xe^{x^2}y^2+ye^{x^2}\right)dx+\left(xe^{x^2}-ye^{x^2}\right)dy=0$$

$M_y = e^x + x\cdot 2x\cdot e^{2x} - y\cdot 2xe^{x^2}$

$N_x = e^x + 2x^2\cdot e^{2x} - y\cdot 2xe^{x^2}$ ⟹ Exact

Scanned by CamScanner

5] Linear First Order

→ $y' + p(x)y = Q(x)$ → General Form

* إذا لقينا الشكل تبع Linear بنزل على بشرط إن معامل y' يساوي (1)

* طريقة الحل:-

1- نجيب Integrating factor

2- بقوم بالمعادلة $\left(y = \frac{1}{U(x)} \cdot \int Q(x)U(x)dx \right)$

→ Integrating Factor :

$$U(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{U(x)} \cdot \int Q(x) \cdot U(x)\,dx$$

Ex: $x y' + 3y = 6x^3$

$y' + \frac{3y}{x} = 6x^2 \longrightarrow$ G.F لذا نرجعها لـ

1] $U(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = x^3$

2] $y = \frac{1}{U(x)} \cdot \int Q(x)U(x)dx$

$= \frac{1}{x^3} \cdot \int 6x^2 \cdot x^3 dx = \frac{1}{x^3}\left[x^6 + c\right] = x^3 + \frac{c}{x^3}$

Scanned by CamScanner

6 Bernoulli [Reduce to Linear] :

General Form: $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$, $n \neq 0, 1$

طريقة الحل: من خلال قوته بنفرجه ونقرب بالمعادلة نصبها بشكل Linear

$\rightarrow z = y^{1-n}$, $z' = (1-n)y^{-n}y'$

هاظه الجزء بنقرب بالمعادلة بنصبح Linear.

Ex: $(2xy - x^2y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

$[\ \nearrow\ ] \div dx\,(y^2+1)$

$$\frac{(2xy - x^2y^2)}{(x^2+1)} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x^2y^2}{x^2+1} + y' = 0 \longrightarrow \boxed{y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{x^2}{1+y^2}y^2}$$

↳ G.F.F Bernoulli

$z = y^{1-n} = y^{-1}$

$z' = (1-n)y^{-n}y' = -y^{-2}y'$

بنقرب بالمعادلة

$$-y^{-2} * \left[y' + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{x^2y^2}{x^2+1} \right] \longrightarrow z' - \frac{2x}{x^2+1}z = \frac{-x^2}{x^2+1}$$ ⇐ Linear (11)

$$u(x) = e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$z = \frac{1}{u(x)} \cdot \int u(x) \cdot Q(x)dx = (x^2+1) \cdot \int \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{-x^2}{x^2+1}dx \rightarrow$$ بكمل وبنزجعها y

Scanned by CamScanner

Ex: $xy' - 2y = 12x^3\sqrt{y}$

$$y' - \frac{2y}{x} = 12x^2 y^{1/2} \longrightarrow \text{G.F of Bernoulli}$$

$$z = y^{1/2}, \quad z' = \frac{1}{2} y^{-1/2} y'$$

$$\frac{1}{2} y^{-1/2} y' - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y = 12x^2 \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y^{1/2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = 6x^2 \longrightarrow \text{Linear}$$

لا تنسى ترجع الفرضية لـ y

Scanned by CamScanner