⊛ second order Linear homogeneous ODE

With constant coefficients

مثلاً مثل النوع هذا يجب أن تجد ٣ أشياء

1- General Form : $y''+ay'+by=0$

2- types of roots → 3 difference: repeated, complex

3- General solution : $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

Non cust coff

يعتمد على الأس

1- General Form :

$$x^2y''+axy'+by=0$$

2- types of roots

3- General solution

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$$

I With cust coff ← لازم مثلاً نطلع قيمة الجذور عشان نعوضها بالمعادلة التفاضلية على شكل معادلات تربيعية.

EX: Solve : $y''-y'-12y=0$

المعادلة المساعدة → $\lambda^2-\lambda-12=0$

$(\lambda-4)(\lambda+3)=0$

نوع الجذور مختلف ← $\lambda=4,-3$

G.S : $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-3x}$

EX: $y''+3y'=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=6$ — I.V.P

$\lambda^2+3\lambda=0$

نوع الجذور مختلف ← $\lambda=0,-3$

G.S : $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-3x}$

$y=c_1+c_2e^{-3}$

⊛ بنستخدم I.V.P لإيجاد قيم الثوابت c_1,c_2

① $y(0)=2 \longrightarrow 2=c_1-2 \rightarrow c_1=4$

② $y'(0)=6 \longrightarrow -3c_2=6 \rightarrow c_2=-2$

$$y=4-2e^{-3x}$$

G.S ↑

①

Scanned by CamScanner

⊛ repeated roots: $\lambda_1 = \lambda_2$

⊛ في حالة λ_1 repeated راح يطلع بالـ G.S $y_1 = y_2$ وهذا خطأ لأنه لازم y_1 & y_2 Independent يعني ما يشابه بينهم فنقوم بضرب y_2 بـ X

G.S of repeated: $y = C_1 y_1 + C_2 X y_2$, $y_1 = y_2$

Ex: Solve $y'' - 10y' + 25y = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda - 5) = 0$

نوعه تكرار ← $\lambda = 5, 5$

G.S: $y = C_1 e^{5x} + C_2 X e^{5x}$

Ex: Solve $4y'' - 4y' + y = 0$

في هذه الحالة يجب أن تحول المعادلة ← إلى general form حيث يكون معامل y'' يساوي 1

$y'' + ay' + by = 0$

$\frac{1}{4} * (4y'' - 4y' + y = 0)$

$y'' - y' + \frac{1}{4} y = 0$ ← General form

$(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})$

G.S: $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 X e^{\frac{1}{2}x}$

⊛ Complex root: $\lambda = \alpha \pm \beta i$

→ General solution: $y = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$

Ex: $y'' - 6y' + 10y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda = 3 \pm i$ ← باستخدام القانون العام

G.S: $y = e^{3x} [C_1 \cos x + C_2 \sin x]$

⊛ لتحليل العبارة التربيعية نستخدم القانون العام

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Scanned by CamScanner

Q :- Find 5.0 ODE whose solution is given

* في هذا النوع من الأسئلة يعطيني ال general solution ويطلب الحل المشكل العام للسؤال.

* خطوات الحل :-
1- بنوحد فيه الجذور في G.S
2- بترجعهم على شكل قوسين لإيجاد العبارة التربيعية
3- العبارة التربيعية تمثل الشكل العام.

Ex :- ① $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}$

② $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$

③ $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Sol :- ① $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$

$(\lambda - 5)(\lambda - 1)$

$\lambda^2 - \lambda - 5\lambda + 5$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

G.F :- $y'' - 6y' + 5y = 0$

② $\lambda_{1,2} = 2$

$(\lambda - 2)(\lambda - 2)$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

G.F :- $y'' - 4y' + 4y = 0$

③ $\lambda = 3 \pm 2i$

$(\lambda - (3+2i))(\lambda - (3-2i))$

$(\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i)$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2i\lambda - 3\lambda + 9 - 6i - 2i\lambda + 6i + 4 - 2\sqrt{-1} * 2\sqrt{-1}$ (i) (i)

$\lambda^2 - 6\lambda - 2(-1)$ → الجذر * الجذر بدون 2

$\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0$

G.F :- $y'' - 6y' + 2y = 0$

Scanned by CamScanner

✳ Non Homogeneous Coff [Euler ODE] :-

✳ الاختلاف بين Homo & Non Homo :-

١- G.S :- $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

٢- في حالة ١ repeated بنضرب بـ $\ln x$

٣- في حالة Complex

G.S $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta \ln x + c_2 \sin\beta \ln x]$

✳ ملاحظات للحل :-

١- يجب أن تكون المعادلة مطابقة لـ (G.F)

٢- لا يجاد الجذور هناك طريقتين للمعادلة

$m(m-1)+am+b=0$

↓

تستخدم إذا طلب general solution

$m^2+(a-1)m+b=0$

↓

يفضل استخدامها إذا طلب general solution

وطلب general Form

EX : $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

$m(m-1) - m - 3 = 0$

$m^2 - 2m - 3 = 0$

$m_1 = 3, \; m_2 = -1$

G.S $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1}$

EX : $2x^2y'' + 5xy' - 2y = 0$

$2m(m-1) + 5m - 2 = 0$

$2m^2 + 3m - 2 = 0$

$(2m-1)(m+2) = 0$

$m_1 = \frac{1}{2}, \; m_2 = -2$

G.S $y = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{x^2}$

EX : $x^2y'' - xy' + y = 0$

$m(m-1) - m + 1 = 0$

$m = 1, 1 \longrightarrow$ repeated

G.S $y = c_1 x + c_2 x \ln x$

Scanned by CamScanner

Ex: $x^2y'' + 7xy' + 10y = 0$

$m(m-1) + 7m + 10 = 0$

$m = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = -3 \pm i$

G.S: $y = x^{-3}[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$

Ex: Find 5.0 ODE whose solution:

① $y = C_1 x^2 + C_2 x^5$ ② $y = x[C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x)]$

Sol:

① $m_1 = 2, m_2 = 5$

$(m-2)(m-5) = 0$

$m^2 - 7m + 10 = 0$

↓ Euler, $x \to e^t$

$m^2 + (a-1)m + 10 = 0$

(a) بينما تأخذ قيمة

$-7 = a - 1$

$a = -6$

become: $m^2 - 6m + 10 = 0$

↓

G.F: $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$

② $m = 1 \pm 2i$

$(m - (1+2i))(m - (1-2i)) = 0$

$m^2 - 2m + 5 = 0 \to -2 = a - 1$

$a = -1$

G.F: $x^2y'' - xy' + 5y = 0$

Scanned by CamScanner

✳ Non Homogeneous ODE's

→ general form: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

→ general solution: $y = y_h + y_p$

↳ solution for Non-Homo

↲ solution for homogeneous ODE $\boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_1}$

To Find y_p We have 2 Methods:

I) ~~Undetermine~~ undetermined Coff:

$r(x)$	y_p
$ke^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
kx^n	$Ax^n + Bx^{n-1} \dots + Cons$
$k\cos wx$, $k\sin wx$	$k_1 \cos wx + k_2 \sin wx$
$ke^{ax}\cos wx$, $ke^{ax}\sin wx$	$e^{ax}[k_1 \cos wx + k_2 \sin wx$

في هذه الحالة y_p يجب أن تحفظ حكمها حفظ من الجدول

✳ تستخدم هذه الطريقة فقط إذا $r(x)$ عبارة عن اقتران موجود بالجدول

✳ إذا كانت في تشابه بين y_h و y_p نضرب بـ x في حالة تشابه x^2 أو أكبر من أكبر حالة تشابه

✳ نحتاج لإيجاد المشتقات لـ y_p بتعويضها في المعادلة الرئيسية

EX: solve $y'' + 3y' + 2y = x^2$

① Find y_h:

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2, -1$

$\boxed{y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

Scanned by CamScanner

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C_0) = x^2$$

$$2A + 3B + 2C_0 = 0 \quad \cdots 1 \longrightarrow$$

بمساواي المجهول

$$6A + 2B = 0 \quad \cdots 2$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{-3}{2}$$

$$1 - \frac{9}{2} + 2C_0 = 0$$

$$C_0 = \frac{7}{4}$$

G.S $y = \underbrace{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}}_{y_p}$

---

* اختيار y_p يعتمد على ٣ قواعد -

1- Basic rule :- لازم يكونوا y_1 و y_2 من نفس النوع ←

1. $y_h = x^m + e^{\lambda x} \rightarrow x$
2. $y_h = e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \rightarrow$

٢- Sum rule :- إذا كانت $r(x)$ عبارة عن أكثر من اقتران

y_p بنعتبر كل واحد فيهم y_p لحال بعدها بنجمعهم على بعض (+ or −)

$r(x) = x^2 + e^x + e^{-x}$

$$y_p = \underbrace{(Ax^2 + Bx + C_0)}_{y_{p_1}} + \underbrace{k_1 e^x}_{y_{p_2}} + \underbrace{k_2 e^{-x}}_{y_{p_3}}$$

٣- Modification rule :- لازم يكون هناك تشابه بين y_p و y_h

$y_h = k e^{3x} + k e^{-x}$

$y_p = A e^{3x} \xrightarrow{\text{نضرب في } x} Ax e^{3x}$ ← مثلما تشبه الحد الأول بال y_h

Scanned by CamScanner

Ex 2 Find the form of y_p for the ODE?

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x} + e^{x} + e^{2x}$$

① Find $y_h \rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

② Find y_p From Table $\rightarrow y_p = Ae^{-x} + Be^{x} + Ke^{2x}$

بعد ما الطلعها بنطبق القواعد الثلاثة السابقة

$$y_p = Ae^{-x} + Bxe^{x} + Kx e^{2x}$$

Ex 2 Find the form of y_p ?

$$y'' + y' + y = \cos x - 9x^2 e^{x}$$

① $y_h \rightarrow y_h = e^{\frac{-x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

② $y_p = K_1 \cos x + K_2 \sin x + (A_2 x^2 + A_1 x + A_0) e^{x}$

Ex Find 5.0 ODE whose solution is $y = \underbrace{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}_{y_h} - \underbrace{\sin 3x}_{y_p}$

① Find G.F of y_h

$\lambda = \pm 2i$

$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$y'' + 4y = 0$

② بعد ما نطلع y_h بنساويها بـ $r(x)$ بعدها بنشتق y_p و نعوضها بالـ general form و بنساوي الحدود المتشابهة

نطلع $r(x)$

$y_p = -\sin 3x$

$y'_p = -3\cos 3x$, $y''_p = 9\sin 3x$

$\rightarrow y'' + 4y = r(x)$

$9\sin 3x + (-\sin 3x) = r(x)$

$r(x) = 5\sin 3x$

G.F عوض

$y'' + 4y = 5\sin 3x$

Scanned by CamScanner

EX2 $x^2y'' - xy' + y = e^x$

① $y_h \rightarrow m(m-1) - m + 1 = 0$

repeated roots $\leftarrow (m = 1, 1)$

$y_h = c_1 x + c_2 x \ln x$

$y_p = Ae^x$

$A = 1$ → بعد ما نعوض ونشتق زي المثال اللي قبل

2] y_p by Variation of parameters ← G.F $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

✱ نستخدم هذه الطريقة إذا طلب أحل كيفما أو إذا $r(x)$ ما الها شكل بجدول (undetermine).

✱ خطوات الحل :-

1- نجد y_h زي ما شرحت قبل ← $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

2- نجد y_p منه خلال هذا القانون ←

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} + y_2 \int \frac{w_2}{w}$$

(y_h منه ←) (y_h منه ←)

3- نكتب G.F ← $y = y_h + y_p$

(w) is Wronskain ✱ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

✱ $w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}$

✱ Wronskain هي بتقدر تحدد منها كمان (depend or Indep) y_1, y_2 إذا

⑨

Scanned by CamScanner

EX 2 $y'' - 3y' + 2y = \cos(e^{-x})$ → not exist in the previous table

① $y_h \rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = 2, 1$

$$\boxed{y_h = C_1 \underbrace{e^{x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{2x}}_{y_2}}$$

② $y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} + y_2 \int \frac{w_2}{w}$

$$w(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \cos(e^{-x}) & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 0 - e^{2x}\cos(e^{-x})$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \cos(e^{-x}) \end{vmatrix} = e^x \cos(e^{-x})$$

$$\rightarrow \int \frac{w_1}{w} = \int \frac{-e^{2x}\cos(e^{-x})}{e^{3x}} = \int \underbrace{-e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx}_{\text{تكامل بالتعويض}} = \sin(e^{-x})$$

تكامل w_1 على w

$$\rightarrow \int \frac{w_2}{w} = \int \frac{e^x \cos(e^{-x})}{e^{3x}} = \int \underbrace{e^{-2x}\cos(e^{-x})}_{\text{بالتعويض نجد أنها بتطلع}} = -\int z\cos z\,dz$$

تكامل w_2 على w

$= (-e^{-x}\sin(e^{-x}) - \cos(e^{-x}))$ by parts

↳ IF $z = e^{-x}$

$dz = -e^{-x}dx$

$$\rightarrow y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} + y_2 \int \frac{w_2}{w}$$

$$y_p = e^x \sin(e^{-x}) + e^{2x}\left(-e^{-x}\sin(e^{-x}) - \cos(e^{-x})\right)$$

$$y_G = y_h + y_p \quad ⑨$$

Scanned by CamScanner

Higher order ODE2

* نفس الـ (2 O.D) بكل الحالات بس بختلف بدرجة المشتقة.
* إذا اشتقت $y^{(n)}$ يعني الأس بيبقى قوسين وفوقه بعبر عن عدد المشتقات.
* عدد الحلول نفس عدد المشتقات

EX2 $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ "4th order"

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda^2 = 4 \quad , \lambda^2 = 1$$

$$\lambda = 2, -2, 1, -1$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$$

EX2 $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' = 0$

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 2m - 3m^2 + 3m + 6m = 0$$

$$m^3 - 6m^2 + 11m = 0$$

$$m(m^2 - 6m + 11) = 0$$

$$\hookrightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \pm 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}\, i$$

$$m = 0, \ 3 + \sqrt{2}\, i, \ 3 - \sqrt{2}\, i$$

$$y = c_1 + x^3 \left[c_2 \cos \sqrt{2} \ln x + c_3 \sin \sqrt{2} \ln x \right]$$

Scanned by CamScanner

EX2 Solve :- $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$$

↳ كده وصلنا للمعادلة بدرجة تخلاها قسمة طويلة

$\lambda = 1 \rightarrow$ بالتجريب

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \hline \lambda - 1 & \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \\ \ominus & \lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline & -\lambda^2 + 3\lambda - 1 \\ \ominus & -\lambda^2 + \lambda \\ \hline & 2\lambda - 1 \\ \ominus & 2\lambda - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda = 0, 0, 1, 1, 1$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 x^2 e^x$$

* في حالة repeated بنضرب بـ x أو x^2 ... وهكذا طبقاً للتشابه.

Scanned by CamScanner

Ex 2 $y^{(6)} + 6y^{(4)} + 9y'' + 4y = 0$

$\lambda^6 + 6\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow$ $\boxed{z = \lambda^2}$ ممكن نكتبها بشكل

$z^3 + 6z^2 + 9z + 4 = 0$

try $z = -1$

$$z+1 \;\overline{)\; z^3 + 6z^2 + 9z + 4 \;}\; z^2 + 5z + 4$$

$\ominus$ $z^3 + z^2$

$5z^2 + 9z + 4$

$\ominus$ $5z^2 + 5z$

$4z + 4$

$\ominus$ $4z + 4$

0

$(z+1)(z^2+5z+4) = 0$

$(z+1)(z+4)(z+1) = 0$

$z = -1 \quad z = -4 \quad z = -1$

$\lambda^2 = -1 \quad \lambda^2 = -4 \quad \lambda^2 = -1$

$\lambda = \pm i \quad \lambda = \pm 2i \quad \lambda = \pm i$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x + C_5 \cos 2x + C_6 \sin 2x$$

Scanned by CamScanner

⊛ Non-Homogeneous higher order ← نفس الطريقة بال second order

1 Undetermined Coefficients

⊛ نفس الجدول ونفس طريقة الحل.

EX: Find the Form of y_p

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 3e^{-x}$$

① $y_h \rightarrow y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \rightarrow \boxed{y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \cdot x + C_3 x^2 e^{-x}}$

② y_p From table $\rightarrow \boxed{y_p = A e^{-x} \cdot x^3}$ → Modification rule

EX: $y^{(3)} + 4y' = 24x^2 + \sin x$

① $y_h \rightarrow \lambda^3 + 4\lambda = 0 \rightarrow y_h = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

② $y_p = x\,(Ax^2 + Bx + C) + K_1 \cos 2x + K_2 \sin x$

Modification rule ← ⊛ في تشابه بالثوابت نضربها بـ x

⊛ إذا بدنا نكمل حل بنشتق y حسب عدد المشتقات وبنعوض بالمعادلة الرئيسية وبنساوي الحدود زي الـ second order

Scanned by CamScanner

2] Variation of parameters of G.F : $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$

$$\rightarrow y_p = y_1\int\frac{w_1}{w} + y_2\int\frac{w_2}{w} + y_3\int\frac{w_3}{w} \cdots$$

$$w(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = y_1 * \begin{vmatrix} y_2' & y_3' \\ y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \ominus$$

$$y_2^* \begin{vmatrix} y_1' & y_3' \\ y_1'' & y_3'' \end{vmatrix} \oplus y_3^* \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2^* & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ r(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & r(x) & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$w_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & r(x) \end{vmatrix}$$

* أكمل الحل باللون Variation, انه لما تكون $r(x)$ بدل Wronskain general form يجب أن يكون معامل y'' يساوي (1) حسب

Scanned by CamScanner

EX/ solve $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \cdot \ln x$

① $y_h \rightarrow x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0$

$(m-1)\left[(m^2-2m) - 3m + 6\right] = 0 \rightarrow (m-1)\left[m^2 - 5m + 6\right] = 0$

عامل مشترك

$m = 1, 2, 3$

$$y_h = c_1\underbrace{x}_{y_1} + c_2\underbrace{x^2}_{y_2} + c_3\underbrace{x^3}_{y_3}$$

② $y_p = y_1\int\frac{w_1}{w} + y_2\int\frac{w_2}{w} + y_3\int\frac{w_3}{w}$

$$w(y_1, y_2 y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} \ominus x^2\begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix}$$

$$\oplus\ x^3\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$6x^3 - 4x^3 = \boxed{2x^3}$

نفس حل w ←

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ x\ln x & 2 & 6x \end{vmatrix} = x\ln x * x^4 = x^5\ln x$$

* وطبعاً $r(x) = x\ln x$ لأنه قسمنا المعادلة كلها على x^3 عشان نرجعها للشكل العام لـ Variation

Scanned by CamScanner

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & x\ln x & 6x \end{vmatrix} = x\ln x * 2x^3 = -2x^4 \ln x$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & x\ln x \end{vmatrix} = x^3 \ln x$$

$$y_p = x\int \frac{x^2 \ln x\, dx}{2} + x^2 \int -x\ln x\, dx + x^3 \int \frac{\ln x\, dx}{2}$$

التكاملات بتتحل by parts

Scanned by CamScanner

Ch:4 : System of ODEs

→ general form : $y_1' = a y_1 + b y_2 + r_1(t)$

$y_2' = \underbrace{c y_1 + d y_2}_{\text{Homogeneous}} + \underbrace{r_2(t)}_{\text{Non-Homo}}$

→ general form of Homogeneous : $y_1' = a y_1 + b y_2$

$y_2' = c y_1 + d y_2$

→ Coefficients Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

→ another form = $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ← Vector ← Vector

$= \vec{y}' = A y$

* عشان نحل أي system بدنا نطلع ١, ل (λ) eigen Value و Corresponding eigen Vector ل ١,٩

* eigen Value = $|A - \lambda I|$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

* eigen Vector = $|A - \lambda I| \vec{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

EX: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ Find eigen Value and corresponding eigen Vector

① $|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \lambda = -4, -2$

Scanned by CamScanner

② eigen Vector :

→ For $\lambda = -4$

ضرب بالصفوف
كل صف بصود

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$ ← وزنا

$x_1 = -t, x_2 = t$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

بنفرض اي قيمة
إلا الصفر للـ x_1
فبطلعوا الحلول

✳ Three Cases of system ODE :-

→ Case 1: eigen Values are difference $\lambda_1 \neq \lambda_2$

@ general solution : $y = C_1 X_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 X_{\lambda_2} e^{\lambda_2 t}$

λ_1 ده eigen Vector ← λ_1

λ_2 ده eigen Vector ← λ_2

EX: $y_1' = y_1 + y_2$

$y_2' = y_1 + y_2$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Let : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$

$\lambda = 0, 2$ → eigen Values

→ eigen Vector For $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$ → بنفرض أي قيم

ما عدا الصفر لأنه بعطينا Infinite solution

Scanned by CamScanner

$$X_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_2 = 2 \longrightarrow X_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y = c_1 \vec{X}_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{X}_{\lambda_2} e^{\lambda_2 t}$$
$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

→ Case 2 & repeated eigen values

general solution :- $y = c_1 \vec{X}_\lambda e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} [t\vec{X}_\lambda + \vec{V}]$

$$\vec{V} = [A - \lambda I | X^* = X_\lambda$$

⊛ بنجيب بعد ما نظهر eigen vector اللي خلعنا ٥ قبل و باطلال يوضح eigen vector بنفرض إنه كنا حديد بدنا نظهر بين ما بنفرض بساوي الصفر بنروح نساوي الـ

$$EX: \quad y_1' = 3y_1 - 4y_2 \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{I.V.P}$$
$$y_2' = y_1 - y_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = [-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4]$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = 1, 1 \text{ repeated}$$

Scanned by CamScanner

eigen Vector For $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 = 0$

$x_1 = 2x_2 \longrightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

We must Find $\vec{V}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يمكن نكتب هيك ←

$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_R$ كله رموز

$2x_3 - 4x_4 = 2$

~~$x_3 - 2x_4 = 1$~~

$2x_3 = 2 + 4x_4$

$x_3 = 1 + 2x_4$

(Infinite solution) لانه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بعطيني 2 ما بقدر اوزن

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right\} \vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = C_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

I.V.P → to Find C_1 & C_2

$y_1(0) = 1 \longrightarrow 2C_1 + C_2 = 1 \quad \cdots 1$ → $C_2 = -1$

$y_2(0) = 1 \longrightarrow C_1 = 1$

$$y = e^t - e^t \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Scanned by CamScanner

→ Case 3 : Complex eigen Value ($\lambda = \alpha \pm \beta i$)

* Let $\lambda = \alpha + \beta i$

Find $\vec{X}_\lambda = \vec{a} + i\vec{b}$

real side ↵ ↳ Imaginary side

* ⇐ * في Complex بيطلع $|\lambda|$ واحد منه الحديه يعني في $\lambda = \alpha \pm \beta i$ أنا بمشي على سبيل المثال المسالبه وباخد واحد منهم $\lambda = \alpha + \beta i$

* the general solution is given by :

$$\vec{Y} = C_1 \vec{U(t)} + C_2 \vec{Q(t)} \quad \text{where :-}$$

$$U(t) = e^{\alpha t}\left[\vec{a}\cos(\beta t) - \vec{b}\sin(\beta t)\right]$$

$$Q(t) = e^{\alpha t}\left[\vec{a}\sin(\beta t) + \vec{b}\cos(\beta t)\right]$$

Ex 2 $\quad y_1' = 4y_1 - 3y_2$

$\quad\quad y_2' = 3y_1 + 4y_2$

① eigen value : $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda = 4 \pm 3i$ ← بختار واحد منهم

② eigen Vector for $\lambda = 4+3i$

$$\begin{bmatrix} 4-4-3i & -3 \\ 3 & 4-4-3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3i\,x_1 - 3x_2 = 0$$

$$X_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

($\vec{a}$ ↵ real) ($\vec{b}$ ↳ Imaginary)

لازم أطلع الأرقام اللي جوا $\vec{a}+\vec{b}i$ ↵

Scanned by CamScanner

$$U(t) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cos 3t - i\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\sin 3t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix}\cos 3t\\0\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}0\\\sin 3t\end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{4t}\begin{bmatrix}\cos 3t\\\sin 3t\end{bmatrix}$$

ملاحظة ما كتبنا i لانه عدد تخيلي عالشاشة رجوده ما بنكتب بالحلول

$$G(t) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\sin 3t + i\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\cos 3t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix}0\\\cos 3t\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}\sin 3t\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{4t}\left(\begin{bmatrix}\sin 3t\\-\cos 3t\end{bmatrix}\right)$$

$$y = C_1\vec{U}(t) + C_2\vec{G}(t)$$

$$= C_1 e^{4t}\begin{bmatrix}\cos 3t\\\sin 3t\end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix}\sin 3t\\-\cos 3t\end{bmatrix} \quad \#$$

Scanned by CamScanner

✱ Non Homogenous system ← G.F ← $y' = Ay + g(t)$

y_h ↙ ↘ y_p

⇒ Variation of parameters ←

1- Find y_h

2- Find y_p From ← $y_p = Y(t) \cdot U(t)$

Y_h ↙ ↘ $U'(t) = Y^{-1}(t) \cdot g(t)$

$U(t) = \int u'(t)\,dt$

$Y(t)$ المعطوفة Inverse ل $Y^{-1}(t)$ ← ونوجد Y^{-1} بطل قانون Inverse ل

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ex ← $y' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

① $y_h = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

✱ $y_p = y(t) \cdot U(t)$

Scanned by CamScanner

$$u'(t) = \bar{y}^{-1}(t)\, g(t)$$

$$\bar{y}^{-1}(t) = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$u'(t) = \bar{y}^{-1}(t) \cdot g(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+1 \\ -3e^{2t} - e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \int_0^t u'(t)\,dt = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

$$y_p = y(t) \cdot u(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t \\ 2 - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2te^{-2t} + 2e^{-4t} - 2e^{-2t} \\ -2te^{-2t} - 2e^{-4t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \#$$

$$y = y_h + y_p = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_p \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner