⊛ Laplace of Transform ⊛ (تحويل لابلاس) (L)

⇒ 6.1

Def: IF $F(t)$ is defined for $t \geq 0$, then:

$$\mathcal{L}(F(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\, dt = F(s)$$

← يكون معطى بالجدول

EX: Find $\mathcal{L}(1)$:→

مثال بسيط لتوضيح كيفية التكامل وكيف اجيب الشكل بالجدول (زي اثبات ١) وهو سهل بطلوب

Sol:

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, dt \quad (\text{Improper Integral})$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\right), \quad s \geq 0$$

← يجب وضع شرط هنا يكون الناتج بدلالة (s) وليس بدلالة (∞) و(0)

$$= \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

※ Rules: موجودات بالجدول بس يجب حفظها

1] $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

2] $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

3] $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$

4] $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

5] $\mathcal{L}(\cos wt) = \frac{s}{s^2+w^2}$

6] $\mathcal{L}(\sin wt) = \frac{w}{s^2+w^2}$

Scanned by CamScanner

⊛ Inverse of Laplace ℒ

$\Rightarrow \mathcal{L}(F(t)) = F(s) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = F(t)$

⊛ properties of Laplace :-

1] $\mathcal{L}(aF(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}F(t) + b\mathcal{L}g(t)$

$= aF(s) + bg(s)$, $a, b \rightarrow$ constants

2] $\mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bg(s)) = a\mathcal{L}^{-1}F(s) + b\mathcal{L}^{-1}g(s)$

$= aF(t) + bg(t)$

EX :- Find $\mathcal{L}(t^5 - 3t^2 + 2) \rightarrow$ بأخل حسب القواعد

sol $2\mathcal{L}(t^5) - 3\mathcal{L}(t^2) + \mathcal{L}(2) \rightarrow 2\mathcal{L}(1)$

$\frac{n!}{s^{n+1}} - 3\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) + 2\left(\frac{1}{s}\right)$

$\frac{5!}{s^6} - \frac{3\cdot(2)!}{s^3} + \frac{2}{s}$ #

EX: $\mathcal{L}(\cos^2(3t))$?? → هنا المشكلة غير موجود في الجدول لذلك سنحاول نحلها بدينا نفكها منه خلال مطابقة لحتى نرجعها لشكلة في الجدول

$\mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos 6t}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(\cos 6t)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 36}\right]$ ✻

لي نفس الجدول

Scanned by CamScanner

* متطابقات مطلوب حفظ -

1] $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ 2] $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

3] $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ 4] $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

5] $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

6] $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

* Ex2 Find $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+5}{s^2-9}\right)$

الان بدنا اياه $\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{s^2-9}\left(\frac{3}{s^2-9}\right)$

مش عارفة ليش ضربنا بالمقلوب بس ضربناها $\div\frac{3}{3}$

Sol2 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2-9} + \frac{5}{s^2-9}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-9}\right) + \mathcal{L}^{-1}\frac{5}{s^2-9}$

$= 2\cosh 3t + \frac{5}{3}\sin h 3t$

* Theorem 2 (S- shift)

⇒ If $\mathcal{L}(F(t)) = F(s)$, then:

$\mathcal{L}(e^{at}.F(t)) = F(s-a)$

* إذا شفنا اقتران $F(t)$ مضروب بـ e^{at} حيث a = constant، بنعمل shift بالمقدار (a) للشكل اللي بالجدول.

Ex2 Find $\mathcal{L}(e^{2t} * \cos(5t))$

Sol2 $e^{at} * f(t)$

$\mathcal{L}(\cos(5t)) = \frac{s}{s^2+25}$ ← ① نوجد شكل الاقتران من الجدول للـ (s)

$\mathcal{L}(e^{2t}*\cos(5t)) = \frac{(s-2)}{(s-2)^2+25}$ ② بنعمل شفت للشكل اللي طلعنا.

Scanned by CamScanner

EX3 Find $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+6s-3}\right)$

Sol 2 $\frac{s+1}{s^2+6s-3} = \frac{s+1}{(s+3)^2-12} = \frac{s+(3-2)}{(s+3)^2-12}$ (1)

← بعد اكمال المربع

$= \frac{s+3}{(s+3)^2-12} + \frac{-2}{(s+3)^2-12}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2-12}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{(s+3)^2-12}\right)$ ← مضاعفة لشكل (sinh) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{-2}{(s+3)^2-12}$

$= e^{-3t} \cdot \left[\cosh(\sqrt{12}\,t) + \left(\frac{-2}{\sqrt{12}}\right)\sinh(\sqrt{12}\,t)\right]$

↓

$e^{at} \cdot F(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s-a))$ #

* ملاحظة الشكل مش موجود بالجدول مشان نجيب الشكل اللي بدنا إياه نعمل اكمال مربع للمقام ونلاحظ بالشكل مشان نوصل للشكل الموجود بالجدول اللي بحلنا السؤال

* تذكير بخطوات اكمال المربع

① ترتيب المعادلة على شكل ax^2+bx+c

② معامل x^2 يجب أن يكون (1)

③ إضافة وطرح $\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2$ للمعادلة

Scanned by CamScanner

✱ unit step function [Important]

→ general form :- $\mathcal{L}u(t-a) = \frac{e^{-as}}{s}$

✱ هو عبارة عن موتر يؤثر على نقطة بداية الاقتران. فإذا أردنا أن نحول نقطة بداية الاقتران نضرب الاقتران بـ $u(t-a)$

حيث تكون هذه نقطة البداية للاقتران الجديد

✱ Rules :

1] If $\mathcal{L}(F(t)) = F(s)$, then :

$$\mathcal{L}(F(t-a) * u(t-a)) = e^{-as} \cdot F(s)$$

لازم يكونوا زي بعض

2] $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as} F(s)) = F(t-a)\,u(t-a)$

نفس بعض

EX :- Find $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right)$!?

عبارة عن e^{-as} نعمل بدلها بعدها بنزيدها

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\sin \pi t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\sin \pi(t-2)\,u(t-2) \quad \#$$

Scanned by CamScanner

Ex 3- Find $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2-4s+13}\right)$ اكمال مربع

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4s+13}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+9}\right)=\frac{1}{3}e^{2t}\cdot\sin 3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2-4s+13}\right)=\frac{1}{3}e^{2(t-3)}\cdot\sin 3(t-3)\cdot u(t-3)$$

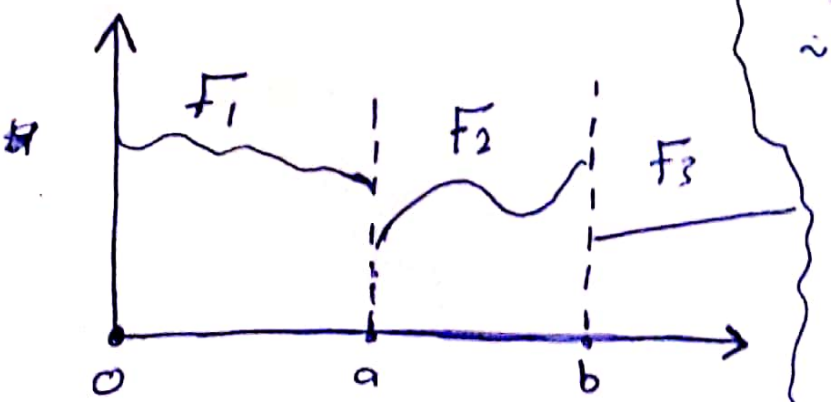
Unit step Function as piecewise Fns-

⇐ remember :

$$\mathcal{L}\{F(t-a)*u(t-a)\}$$

لازم نفس بعضه

⇐ (كتبوا معاي كالسمة محاضرة نعرف U.S.F شو وظيفته ؟



← البشرح الأول حتى ؟ بنلاحظ إنه F_1 بدأ من (0) لعند (a) لبين عمانه عنا F_3 بدأ من عند (a) فمشان نثبت نقطة البداية للاقترانة F_2 بنضرب $u(t-a)$ ومشان نلغي نقطة البداية بنضرب F_2-F_1 بزود نطرح F_1 فبصير عنا $(F_2-F_1)*u(t-a)$ ← زي كانه عملنا shift

[انتقلنا الى اقترانة جديد] F_2 الى F_1 من

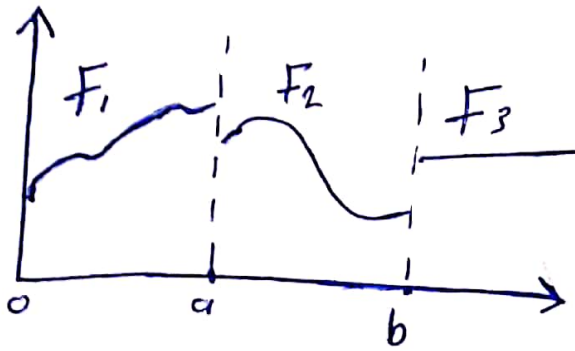
نبتدا نقطة تبديل اقترانة F_2

⊛ كيفية الحل إذا اجى سؤال عكسه (piecewise) ؟

← بنفك الـ piecewise اللي F(t) زي ما فهمنا قبل وبالمثال بوضح

* بعدها بندخل لابلاس عادي حسب الجدول

EX 3



$$F(t) = \begin{cases} F_1 , & 0<t<a \\ F_2 , & a<t<b \\ F_3 , & t>b \end{cases}$$

$$F(t) = \underbrace{F_1(t) * u(t-0)}_{\text{أول جزء}} + \underbrace{(F_2(t)-F_1(t)) * u(t-a)}_{\text{ثاني جزء}} + \underbrace{(F_3(t)-F_2(t)) * u(t-b)}_{\text{ثالث جزء}}$$

(نفكه لبايه ← ، بداية F_2 ←، shift من F_1 لـ F_2 ، بداية F_3 ←)

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}[\quad]$$

⊛ مثال توضيح للفكرة بس [المثال اللي أوضح]

EX 2 $$F(t) = \begin{cases} 2 , & 0<t<2 \\ t , & 2<t<3 \\ 3 , & t>3 \end{cases}$$

$$F(t) = 2 * u(t-0) + (t-2)u(t-2) + (3-t)u(t-3)$$

($u(t-0) = 1$)

(مش لقيس بعدله بنظرب بسالب)

$u(t-a) = e^{-as}$

$u(t-0) = e^{-0s} = e^{0} = 1$

فعادي لو ما كتبت

Scanned by CamScanner

$$F(t) = 2 + (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$

$$\mathcal{L}\,F(t) = \mathcal{L}\left[2 + (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)\right]$$

$$F(s) = \frac{2}{s} + e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad \#$$

* طريقة أخرى لإيجاد (U.S.F) بتعطي نفس الجواب بس أسهل منه اللي قبلها (بتغنيك عن كل اللي قبلها)

$$F(t) = \begin{cases} F_1 , & t < 1 \\ F_2 , & 1 < t < 3 \end{cases}$$

* بتحل كل المسائل بهذه الطريقة إذا الفترة اكبر من (1) بين الأعداد و بترتبط عكلش بالطريقة هاي

$$F(t) = F_1\left(u(t-a) - u(t-b)\right) \quad (*)$$

Ex ~~Let F(t) = { 2 , 2 ; t , t ; sin t , sin t }~~

Ex 2 Let $F(t) = \begin{cases} 2 , & t < 1 \\ t , & 1 < t < 3 \\ \sin t , & t > 3 \end{cases}$

$$F(t) = 2\left(u(t-0) - u(t-1)\right) + t\left(u(t-1) - u(t-3)\right) + \sin t\left(u(t-3) - u(t-\infty)\right)$$

بتكمل حل حسب الجدول

Scanned by CamScanner

EX Let $F(t) = \begin{cases} 0 & , t < \pi \\ \cos t & , t > \pi \end{cases}$ Find $\mathcal{L}\, F(t)$

$F(t) = 0\,(u(t-0) - u(t-\pi)) + \cos t\,(u(t-\pi) - u(t-\infty))$

$\mathcal{L}\, F(t) = \mathcal{L} \cos t\,(u(t-\pi))$

$F(s) = \mathcal{L} \cos((t-\pi)+\pi)\, u(t-\pi)$

$= \mathcal{L} \cos(t-\pi) \cdot \cos(\pi)\, u(t-\pi)$

$= -\mathcal{L} \cos(t-\pi)\, u(t-\pi) = \dfrac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}$ ##

---

* دايما حلو بالطريقة الثانية أفضل لأنه الطريقة الأولى ما بتقدر تحل عليها إذا كانت الفترة اكبر درجة زي $1<t<3$ لازم حل بسيط المثال $1<t<2$ أو يكونه اقترانات مثلثية.

* Dirac Delta Function ما رح نحل شكله

G.F $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$ #

Scanned by CamScanner

6.2 :- Transforms of Derivatives and Integrals

* المطلوب إنك تحل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية بوساطة اللابلاسي والحل عبارة عن تعويض و ترفيع

الترفيع ←

$$\mathcal{L}(F') = s\mathcal{L}(F) - F(0)$$
$$\mathcal{L}(F'') = s^2\mathcal{L}(F) - sF(0) - F'(0)$$

} حفظ

التعويض ← بالمعادلة اللي بدنا نحلها

* كيفما شكل السؤال (مهم تعرف) هي

$$\underbrace{y'' + ay' + cy}_{\text{معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية}} = r(t)$$

اقترانه يجب أن يكون إله شكل بالجدول هاد

* خطوات الحل :- ١- بندخل اللابلاسي عالمعادلة بشقيها

٢- بنكتب الترفيعات اللي حاطلينه ٣- بنعوض الترفيعات بعد ما قيم (I.V.P)

٤- بنلعب بالمعادلة بحيث نخلي $Y(s)$ على طرف وكل شي غير $Y(s)$ عالطرف التاني

٥- $Y(s)$ بنطلع عناصر شكل حسور جزئية بنطلع قيم الثوابت بالتكامل. (partial fractions)

٦- بنوخذ $\mathcal{L}^{-1}$ لـ $Y(s)$ منشان نطلع $y(t)$

#

Scanned by CamScanner

Ex: Find $y(t)$: $(y'' - 4y) = 5e^{3t}$, $y(0)=1$ $y'(0)=7$

Sol: $\mathcal{L}(y'' - 4y) = \mathcal{L}(5e^{3t})$ ... [1] وحلنا

$$\left[(s^2 y(s) - s(y(0)) - y'(0)) - 4y(s) \right] = \frac{5}{s-3} \quad \text{... [2]}$$

حسبنا وعوضنا الشروط

$$Y(s^2-4) - s - 7 = \frac{5}{s-3} \quad \text{... [3] I.V.P عوضنا شرط}$$

$$y(s) = \frac{5}{s-3} + s + 7 = \frac{5 + (s-3)(s+7)}{(s-3)}$$

$$(s^2-4)y(s) = \frac{s^2 + 4s - 16}{(s-3)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}$$

→ Finding the values of (A, B, C) &

$[A=1, B=1, C=-1]$ ⟶ (∫ partial fraction)

$$y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{s+2}\right)$$

$$\boxed{y(t) = e^{3t} + e^{2t} - e^{-2t}}$$

Scanned by CamScanner

EX 2 $y'' + y' + y = \int_0^t y(u)\,du$, $y'(0) = 1$ $y(0) = 0$

$\mathcal{L}$ $y'' + y' + y = \mathcal{L} \int_0^t y(u)\,du$

$s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0) + s\,y(s) - y(0) - y(s) = \underbrace{\frac{1}{s} y(s)}_{\text{Integral}}$

$y(s)\left(s^2 + s - 1 - \frac{1}{s}\right) = 1$

$y(s)\left(\frac{s^3 + s^2 - s - 1}{s}\right) = 1 \longrightarrow y(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 - s - 1}$

$y(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+2s+1)}$ ⟶ $s-1 \overline{)\, s^3 + s^2 - s - 1}$, $s^2 + 2s + 1$

$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$ ⟶ بنطلع الثوابت بالطريقة المعتادة بالكسور الجزئية

$\rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2}\right) = 2e^{-t} \cdot t}$ Final answer

Scanned by CamScanner

Ex2 solve $y''+2y'+2y = e^{-t} + 5\,\delta(t-2)$, $y(0)=0$ $y'(0)=1$

$$\rightarrow s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2s\,y(s) + 2\,y(s) = \frac{1}{s+1} + 5e^{-2s}$$

$$y(s)\,(s^2+2s+2) = 1 + \frac{1}{s+1} + 5e^{-2s}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} + \frac{5e^{-2s}}{s^2+2s+2}$$

⋮

Ex2 solve $y''+5y'+6y = 4(t-\pi)\cos t$, $y(0)=y'(0)=0$

$$s^2 y(s) + 5s\,y(s) + 6\,y(s) = \frac{-s e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$y(s) = \frac{-s e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{s}{(s^2+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(s+2)(s+3)}\right) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + C\cos t + D\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s+2)(s+3)}\right) = -\left(Ae^{-2(t-\pi)} + Be^{-3(t-\pi)} + C\cos(t-\pi) + D\sin(t-\pi)\right)\cdot u(t-\pi)$$

Scanned by CamScanner

* أسئلة على المادة كاملة 8 - (مهم ، تنحل لأنه تنشر في البيجي)

1] Solve & $(xy+3x+2y+6)dx+(x^2y^2+4y^2+4x^2+16)dy=0$

2] Solve & $(x^2\sqrt{x^2+1}+y^2)dx+(2xy\ln x)dy=0$

3] $xy'-2y=12x^2\sqrt{y}$ → solve

4] Solve & $xy'=y\ln x-y\ln y$

5] An integrating Factor that makes the differential equation $\left[2+\frac{3}{x}\right]\cos y\,dx-\sin y\,dy=0$ exact is?

6] Given the I.V.P $xy^2\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$, $y(1)=A$. IF the general solution of I.V.P is $y^3+3x^3\ln|x|=8x^3$, then the Value of $A=$?

7] which of the Following differential equations is a Bernoulli's equation?

1] $x^3y'+5xy^2=y^3$ 2] $\frac{dy}{dx}=\frac{1-xy^2}{2x^2y}$ 3] $(y^2-3xy^2)dy+(5x^2+2y^3)dx$

4] $y'=\sin x-(\tan x)y+y^2$

Scanned by CamScanner

8 The Value of (k) that makes ODE

$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$ exact is?

9 An integrating Factor for ODE $\cos x\,dx + (1 + \frac{2}{y})\sin x\,dy = 0$ is ?

10 solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

11 solve: a $xy'' = 2y' + x^4$ b $y'' = y'(1 + y')$

12 solve: $y^3y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$ $y'(1) = 0$

13 $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$, Given $y_1 = e^x$ Find y_2

14 $xy'' + 2y' + xy = 0$, Given $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ Find General solution.

15 The 2nd order Cauchy-Euler ODE with general solution $y = c_1x + c_2x\ln x$ is?

16 solve: $y'' + 6y' + 9y = \frac{16e^{-3x}}{1 + x^2}$ --- (P)

17 Use undetermined coeff method to write a suitable Form of a particular solution y_p of $[y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 7 - 3e^{-x}\cos^2\frac{x}{2}]$

Scanned by CamScanner

18 Find the general solution of $[y^{(5)} + 4y''' + 5y'' = 0]$

19 Find the general solution of the following system

$$y' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

20 Find the general solution of the following system using Variation of parameters $y' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$

21 solve using undetermined coeff $[y''' - y'' + 4y = e^x]$

22 solve the system: $y_1' = 3y_1 + 2y_2$

$y_2' = -2y_1 - y_2$

23 solve $y'' + 3y' + 2y = u(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$

24 solve $y'' + 3y' + 2y = u(t-1) + u(t-2)$

25 solve $y'' + 3y' + 4y = 6e^{2t-3}$, $y(1.5) = 4$ $y'(1.5) = 5$

Scanned by CamScanner