

NUMERICAL METHODS



BY.

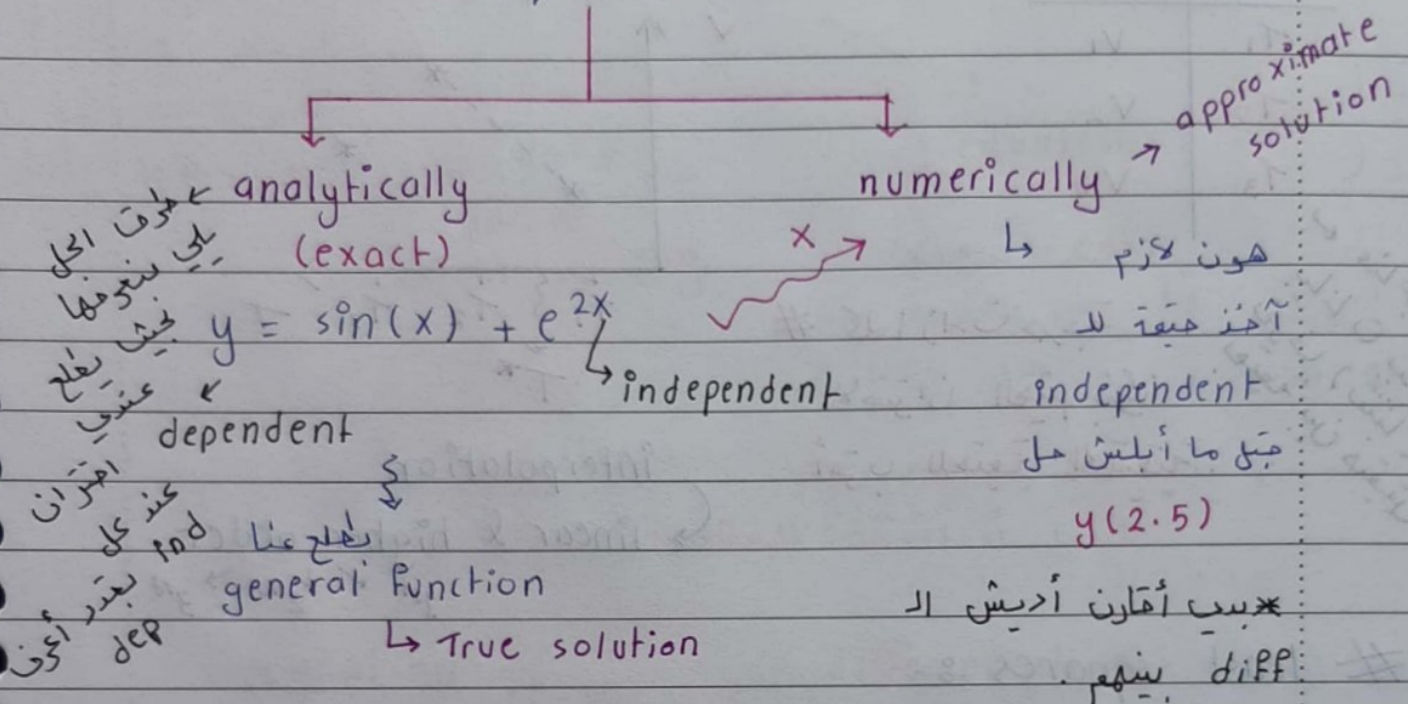
**Fatima
Arafat**

**DR. Yousef
Mubarak**

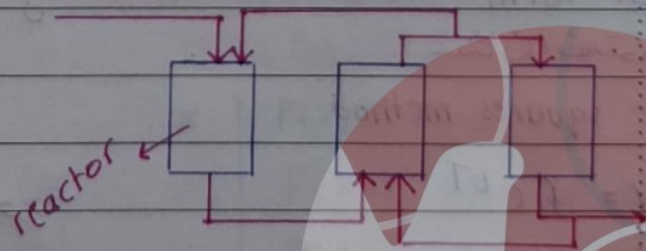
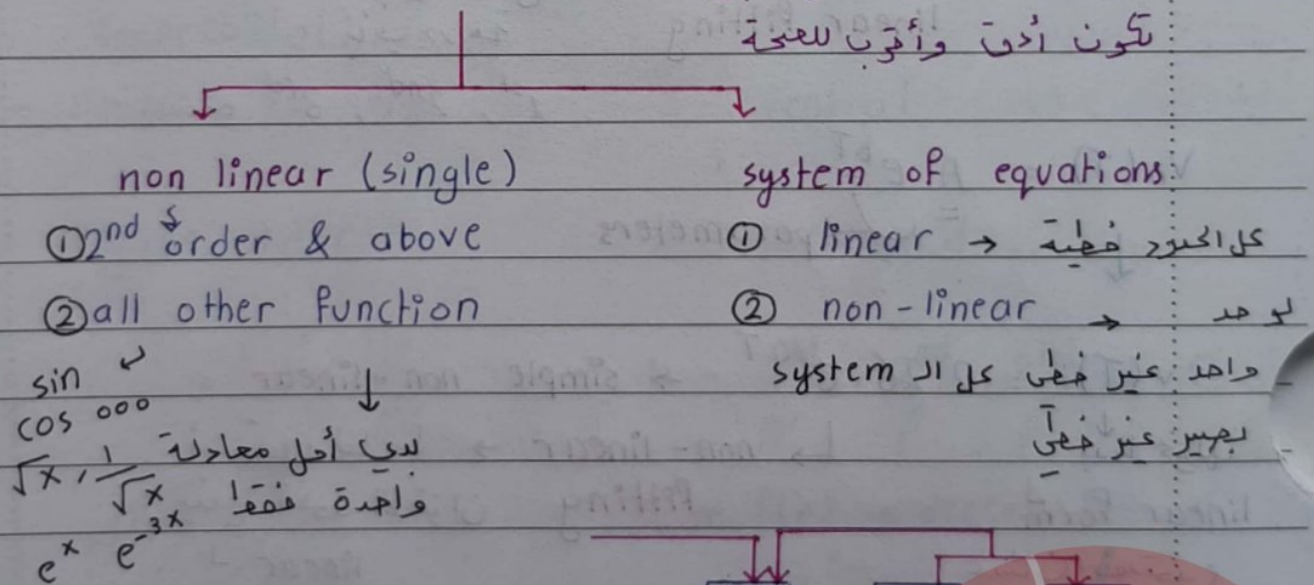
madarju.com



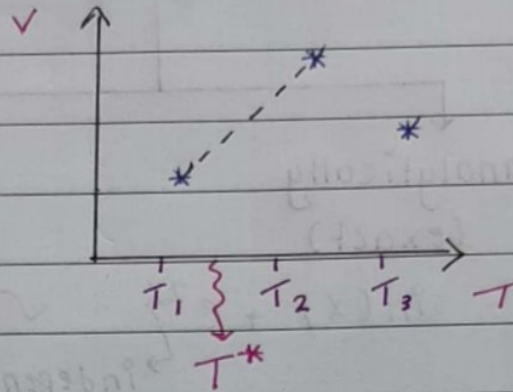
Equations



Numerical



T	V
T ₁	V ₁
T ₂	V ₂
T ₃	V ₃



عنا مجموعة
بيانات
نريد ان نربطها
بخط (تقريباً)
التي تكون
بين حقيقتين

كلما زادت درجة

الامتزان الجيم تكون

أقرب للحقيقة الحقيقية

interpolation

linear & higher order

1st ✓ 2nd → 3rd

least squares :-

→ linear fitting

يقول أي poly
أني درجة

1st, 2nd, 3rd

$$V_n(T) = A e^{bT}$$

= parameters

$$V(T) = 2.26 e^{30T} \rightarrow \text{simple non-linear}$$

بدلاً من تحويلها
linear form

→ non-linear fitting

linear

عشان نستخدم

least squares method

$$V = A e^{bT}$$

$$\ln V = \ln A + bT$$

$$X = a + bT \rightarrow \text{linear}$$

parameters

$$X = \ln(V)$$

ask, believe & recieve

NOTEBOOK

Integration & differentiation :-

fitting لعمل
لاختزان معين لما
يكون عندي data

data
↓
fitting لعمل

equation

data ← أو جدها

من المعادلة بعدين
↓
fitting لعمل

substitution
بفعل

↓
رأى يطلع جده بعدين

تكاملاً أو اشتقاقاً للبيانات

Integration

1 - mid point
(Trapezoidal)

2 - Simpson $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$

3 - Higher order

differentiation

1 - forward

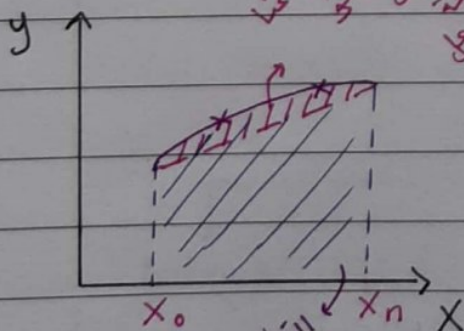
2 - central

3 - Backward

4 - 1st , 2nd , 3rd
 f' f'' f'''

* $f(x) \rightarrow$ derive it

← عندي الاختزان متباعدة



التكامل هو اعطاء
7/4

error
مكون عندي
قائمة من لا شيء عندي
بفعل

x	f(x)
x ₀	f(x ₀)
x ₁	f(x ₁)
x ₂	f(x ₂)

عندي
بيانات

$f'(x_0)$

$f''(x_1)$

ask, believe & recieve

x	y	x	y
2 (1		1 (1	trap
2 (3		2 (2	trap
2 (5		5 (9	Trap
2 (7			

المساخات
متساوية بين النقاط
equal space

المساخات
غير متساوية بالتالي ما بعدد
أستعمل الطريقة هون

Differential equation

ordinary → one independent variable

partial → more than one independent variable

$\frac{dz}{dx} = f(x, y)$

Finite elements

المساخات
المتساوية

- ① First order or higher order.
- ② homogeneous & non homogeneous
- ③ linear & non-linear.

⇒ طرق الحل

- ① Euler
- ② polygon
- ③ modified Euler
- ④ Runge kutta

Computing & computers 8 -

Numbers

Decimal

(0, 1, 2, 3, ..., 9)

Binary

(0, 1)

human

computer

From decimal
to Binaryoperation
(Binary)

screen

أنا أدخل

على الحاسوب

decimal
والحاسوب

بجولها

العمليات الحاسوبية

على الحاسوب سيكون لا
Binaryconvert from
Binary to
decimal

الحاسوب

بالنهاية يعرض

أرقام عادية

computer

Numbers

integer

Real



Integer :-

(word)

لما أدخل

رقم صحيح

الحاسوب يحزم مكان

للرقم ، لنفرض

الحاسوب يحجز

4 Bits

0 0 0

For sign (+)

الحاسوب ما يفهم الإشارات

يكون عامل - $0 \rightarrow$ $1 \rightarrow +$ راح أخط
فيه الأرقام
(0 $\rightarrow$ 9)

عنا 4 Bits

كل Bit يستوعب

رقم واحد فقط

(only for one)

number

9 9 9

 $\rightarrow$ أكبر رقم ممكن أخطو

بهاي الحالة لما عندي 3 Bits

هو 999 ، وأصغر أسّي 0

999 $\rightarrow$ max0 $\rightarrow$ min

إذا دخلنا 1000 راح يطبع عندي errors راح يحكي overflow ، مراح

يعمل تقريب للرقم يا يقبل الرقم أو لا يقبل لا يوجد حل وسط $\gg$ overflow

يعني الرقم لي دخلتو خارج عن قدرة الذاكرة (لا يقم استيعابه)

• single precision $\rightarrow$ one word

(32 bits)

• double precision $\rightarrow$ Two word

(64 bits)

أكبر
أصغر

(9 9 9 9 9 9 9 9)

±	0	0	0	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

أنا في هاي الحالة
أنا ذنب السعة
يقتل الألف

Real :-

$$(0. \square \square \square \square \square) * 2^{(\pm n)} \rightarrow \text{exponent}$$

mantissa

$$0. \square \square \square * 10^{\pm n}$$

$$x = 12.5 \rightarrow 0.125 * 10^{+2}$$

كيف الحاسوب يفهم
هذه الرقم

$$0. \boxed{1} \boxed{2} \boxed{5} * 10^{+\boxed{0} \boxed{2}}$$

كلما زاد عدد ال Bits زادت

ال accuracy

$$\boxed{\pm} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{\pm} \boxed{0} \boxed{2}$$

$$\Rightarrow 0.12511 * 10^{+2}$$

$$0. \boxed{1} \boxed{2} \boxed{5} * 10$$

أكبر حصة بس
رقمين 99
لا يقبل
8100 لا يقبل

$$\rightarrow 0.12511 * 10^2 \rightarrow 12.511$$

$$\rightarrow 0.125 * 10^2 \rightarrow 12.5$$

في حال real ممكن
يخبر تقريب الرقم
يكون في نسبة error لكنها مقبولة

$$10^{+100}$$

over Flow

$$10^{-100}$$

under Flow

لو كانت 99- بعتلها
لأنها نفس السعة.

1 - over Flow $\rightarrow$ stop

2 - under Flow $\rightarrow$ stop

$\rightarrow$ very small

$\rightarrow$ tend to be

zero

$0.125 \times 10^{-100} \rightarrow$ zero

لأنه أي كمال الحاسوب ما يجزئني
لأنه لو كان في مسافات جنوب أو
متسعة والرقم دخل فيها راح تطلع الأرقام
أصغر بالتالي العتيم راح تكون غلط.

Decimal to Binary :- (integer)

بدي أمقسم على 2

→ N → integer

الباقى

$$N = 2Q_0 + b_0$$

الباقى حصة (0, 1)
العدد على 2

ويبقى الباقي بهاي الحالة

الباقى إما 0 أو 1

إذا قسمت على 3

0, 1, 2 وهكذا...

$$Q_0 = 2Q_1 + b_1$$

فردى زوجى
 $b_1 = 0$ $b_1 = 1$

$$Q_1 = 2Q_2 + b_2$$

فردى زوجى
 $b_2 = 0$ $b_2 = 1$

بفضل أمقسم
كد ما نحير
 $Q = 0$

$$** Q_n = \text{zero} \quad b_n = \text{zero}$$

⇒ We take b ⇒ (b₀, b₁, b₂, ...) (b₀, b₁, b₂, ...) (b₀, b₁, b₂, ...)

N (2)
Binary

$$\text{let } N = 27 \times 10^0$$

$$\rightarrow 27 = 2(13) + 1 \rightarrow b_0$$

↳ Q₀

$$\rightarrow Q_2 = 2(1) + 1 \rightarrow b_3$$

↳ Q₃

$$\rightarrow Q_0 = 2(6) + 1 \rightarrow b_1$$

↳ Q₁

$$\rightarrow Q_3 = 2(0) + 1 \rightarrow b_4$$

↳ Q₄

$$\rightarrow Q_1 = 2(3) + 0 \rightarrow b_2$$

↳ Q₂

$$\rightarrow Q_4 = \text{zero (stop)}$$

$$b_0 = 1$$

$$b_3 = 1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_4 = 1$$

$$b_2 = 0$$

$$b_5 = 0$$

$$b_6 = 0$$

⇒ Try :-

N_2 :- $b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ 0000$

$$\begin{array}{ccccccc} & 2^5 & 2^4 & & & & \\ & \swarrow & \searrow & & & & \\ 2^6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & & & \end{array}$$

هناي الغريبة →

غير صحيحة راج

تفلي error

← هون ما راج

بين الخطأ لأنو

عندي تقابل من

الطرين

N_2 : $000 \ b_4 \ b_3 \ b_2 \ b_1 \rightarrow$ (correct)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2^2 & & & \\ & & & \swarrow & \searrow & & \\ 2^4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & & & \end{array}$$



$$N = 31 :-$$

$$31 = 2(15) + 1 \rightarrow b_0$$

$$15 = 2(7) + 1 \rightarrow b_1$$

$$7 = 2(3) + 1 \rightarrow b_2$$

$$3 = 2(1) + 1 \rightarrow b_3$$

$$1 = 2(0) + 1 \rightarrow b_4$$

$$0 = 2(0) + 0 \rightarrow b_5$$

$$N_2 = b_5 \ b_4 \ b_3 \ b_2 \ b_1 \ b_0$$

$$0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$\leftarrow 2^5 \ 2^4 \ 2^3 \ 2^2 \ 2^1 \ 2^0$$

راح يطلع الناتج

31

$$2^5 \ 2^4 \ 2^3 \ 2^2 \ 2^1 \ 2^0$$

$$N = \boxed{\pm} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{1}$$

27
↓

$$N_2 = 11011$$

$$N_2^* = \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \rightarrow \text{overflow}$$

ليس له مكان

$$\boxed{\pm} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1}$$



Real to Binary :-

$$X = \square . \square$$

integer

Fraction (R) →

مختبر

(N) ← بنعل مثل ما

$$0 \leq R < 1$$

2

كنا نعل قبل

$$d_s \quad F_s (F_0)$$

$$2R = \square . \square \rightarrow (0 \text{ to } 0.9999)$$

1 or 0

F₁

$$2F = \square . \square$$

(0, 1)

$$X = 3.25$$

$$N = 3$$

$$R = 0.25$$

$$N = 2(1) + 1 \rightarrow b_0$$

$$3 : 11$$

$$1 = 2(0) + 1 \rightarrow b_1$$

$$\Rightarrow \text{For } R \Rightarrow R = 0.25$$

$$2R = 2(0.25) = 0.5$$

d₀

$$\rightarrow F_0 = 0.5$$



$$2F_0 = 2(0.5) = 1.0$$

$d_1 \rightarrow F_1$

$$2F_1 = 2(0) = 0.0$$

$d_2 \rightarrow F_2$

$$2F_2 = 2(0) = 0.0$$

$d_3 \rightarrow F_3$

$\Rightarrow$ Take $d's \Rightarrow$

$$d_0 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$$d_1 = 1$$

$$d_3 = 0$$

$$R_2 = 0.d_0 d_1 d_2 d_3 \text{ (correct)} \rightarrow R_2 = 0.0100 \rightarrow 0.25 \checkmark$$

$$R_2 = 0.d_4 d_3 d_2 d_1 d_0 \text{ (in correct)} \rightarrow R_2 = 0.0010 \rightarrow 0.125 \times$$

$$R = 0. \begin{array}{c} \square \\ 2^{-1} \end{array} \begin{array}{c} \square \\ 2^{-2} \end{array} \begin{array}{c} \square \\ 2^{-3} \end{array} \begin{array}{c} \square \\ 2^{-4} \end{array} \begin{array}{c} \square \\ 2^{-5} \end{array}$$

$$\# 3.25 \Rightarrow 11.01$$

$N_2 \leftarrow \quad \rightarrow R_2$

$$= 0.1101 \times 2^2 \rightarrow 0.8125 * 4 = 3.25$$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$

Binary

$$y = 2.13$$

$$N = 2$$

$$R = 0.13$$

$$N = 2(1) + 0 \rightarrow b_0$$

$$N_2 = 10$$

$$1 = 2(0) + 1 \rightarrow b_1$$

$$2(0.13) = 0.26$$

$$d_0 \rightarrow F_0$$

$$2(0.26) = 0.52$$

$$d_1 \rightarrow F_1$$

$$2(0.52) = 1.04$$

$$d_2 \rightarrow F_2$$

كلما زاد عدد الـ Bits كانت

خطة الرقم أكبر

$$2(0.04) = 0.08$$

$$d_3 \rightarrow F_3$$

$$2(0.08) = 0.16$$

$$d_4 \rightarrow F_4$$

$$2(0.16) = 0.32$$

$$d_5 \rightarrow F_5$$

$$2(0.32) = 0.64$$

$$d_6 \rightarrow F_6$$

$$0.13_2 = 0.00100001$$

$$d_0 \rightarrow F_7$$



$$2.13 = 10.00100001$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{256}$

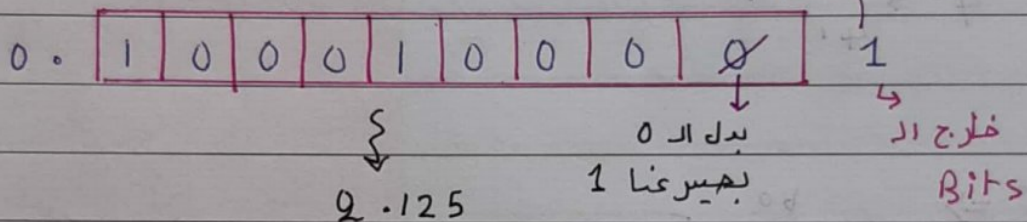
$$2 + 0.1289 = 2.1289$$

لأقل من الرقم الحقيقي.

$$2.13 \Rightarrow$$

$$0.1000100001 * 2^2$$

لأننا
الفاصلة



$$2.125 + \frac{1}{128} = 2.1328$$

لأن الرقم أكبر من
الرقم الحقيقي

* يا بخذ الرقم وبعده

يا بقرب الرقم بكبر.

* عشان خل هاي الشكل

وبعير الرقم أدق بزيادة

عدد ال Bits



NOTEBOOK

$$42 \Rightarrow$$

$$42 = 4 * 10 + 2 \rightarrow d_0$$

Basis = 4 إذا بقي #

أقسم على 4 والباقي راج يكون

$$10 = 4 * 2 + 2 \rightarrow d_1$$

(0, 1, 2, 3)

$$2 = 4 * 0 + 2 \rightarrow d_2$$

$\bar{Q} = 0$ (stop)

$$42 = d_2 d_1 d_0$$

التوضيح
التي
Basis = 4

$$F = 0.6 \Rightarrow$$

$$4 * (0.6) = 2.4 \rightarrow F_0$$

$$4 * (0.4) = 1.6 \rightarrow F_1$$

$$4 * (0.6) = 2.4 \rightarrow F_2$$

كلما كان الرقم أمثل

كان في مشكلة بتعيل الرقم.

$$0.6_4 = 0.2121$$

$$= 0.\overline{21}$$



Addition & subtraction of Binary 8-

1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0

كل Bit يتوحد digit وحدة

ما ينتج أعلاه هو ال Bit (11)

يتم تخزينها.

عشان أقلل من مشكلة انو
يطلع عندي خانات كثيرة داخل
ال Bit بتقدر أجزئ الآلة

$$A + B + C + D$$

$$① A + B$$

$$② (A + B) + C$$

$$③ (A + B + C) + D$$

يعني بالآلة راح أجمع روتين بس

في الفرج والجمع يخلص

من العين اليسار

①

	0	0	11	
-	X	X	X	→ 6
	0	1	1	→ 3
	0	1	1	3

الرقم لي فوق أكبر

لأنو كلها زادت أعداد ال Bits

ال Binary الرقم يكون أكبر.

في حال عكست الرقعتين

ال 3 فوق وال 6 تحت راح أخلق

نفس العملية بس إلا إشارة ستكون
سالبة.

(2)

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow 10 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \underline{19}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

هائي
فوق

(3)

$$\begin{array}{r}
 - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 23 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow 18 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \underline{5}
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 1 \quad 1 \quad 11 \\
 - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow 7 \\
 \hline
 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \underline{11}
 \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 11 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 45 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow 9 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow 14 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \underline{68}
 \end{array}$$

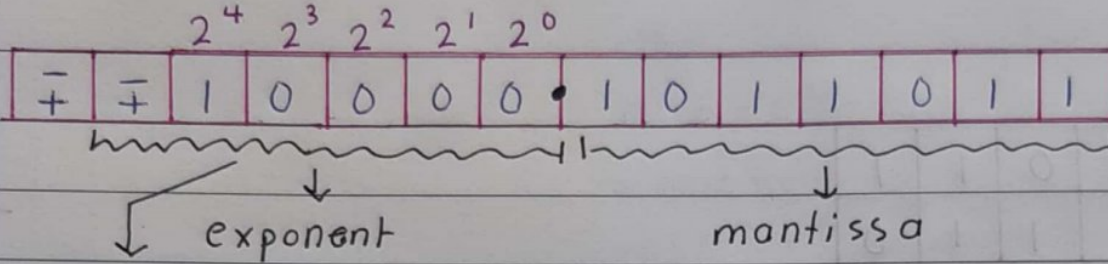
$$\begin{array}{r}
 1 \\
 + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

هائي
فوق

$$\begin{array}{r} \textcircled{6} \quad 1011.011 \\ + \quad 10.001 \\ \hline \end{array}$$

↓

$$(0.1011011 \times 2^4) \rightarrow \text{normalize number}$$

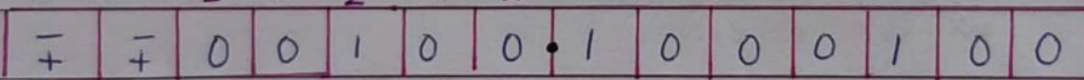


$$\begin{array}{c} 01010 \\ 2^3 \quad 2^1 \end{array}$$

هون مكان 2^4

يعني بقدر اكتب باي
مسيخة بس لكم القوة
تكون 2^4

$$0.10001 \times 2^2$$



$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ 0.1011011 \times 2^4 \\ 0.0010001 \times 2^4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.1101100 \times 2^4 \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \end{array} \Rightarrow 13.5$$

$$1101.1 \rightarrow 13.5$$

بقدر آخذ الرقم من غير القوة أسهل عشان أخرجوا.

* خانة أخرج

أطالتي
بوحدة القوة.

Multiplication :-

$$A = 1011 \rightarrow 11$$

$$B = 110 \rightarrow 6$$

*	1	0	1	1	
		1	1	0	

0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0

10000010
→ 66

كيف تتم عملية الضرب :-

بأخذ البتة الأولى من الرقم الثاني
وبضربها بكل الرقم الأول ويكون الجواب
بعد خانة الرقم الأول ، بعدين بأخذ
الرقم الثاني (البتة الثانية من الرقم الثاني)
وبضربها بكل الرقم الأول وبجعل إزاحة
خانة بعدين نفس عدد خانة الرقم
الأول وهكذا ... بعدين يجمع الأرقام .



NOTEBOOK

Single non-linear equation 8-

solution

↳ Root of equation

$$\Rightarrow F(x) = 0$$

لأننا نريد أن نحل

المعادلة على هات

المعادلة حتى لو ما كانت

مكتوبة.

$$x^3 + \sin(x) - e^{3x} = 0$$

↓

لو كانت

$$x^3 + \sin(x) = e^{3x}$$

أخبرنا بها الصيغة

$$x^3 + \sin(x) - e^{3x} = 0$$

solution is

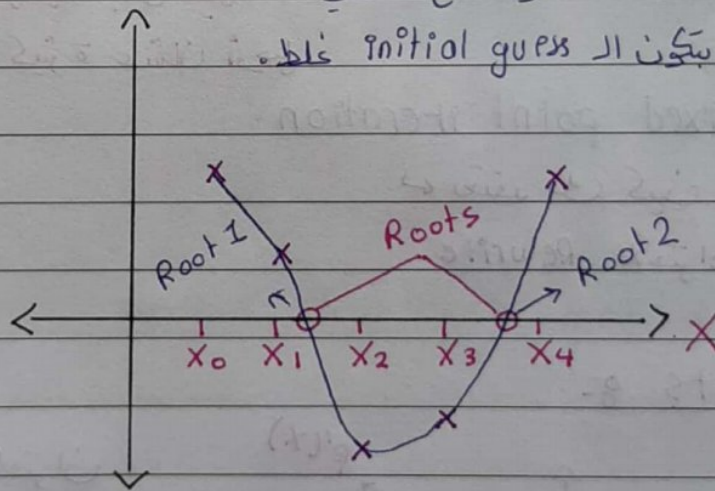
the root

$$F(x) = 0$$

1- Graphical solution, $F(x) = 0$:- $F(x)$

* إذا رسمت وما طلع عندي

Roots يكون ال initial guess غلط

 x $F(x)$ x_0 $F(x_0)$ x_1 $F(x_1)$ x_2 $F(x_2)$ x_3 $F(x_3)$ x_n $F(x_n)$ 

stepsize
لازم يكون صغيرة
عشان يكون عندي
good estimation
of root

* ما بهمني أديش حول ال interval

الهم يكون عندي Roots

2- Numerical solution :-

1- Bisection method.

2- False position method.

3- secant method.

لكل نوع عشي

condition معينة لو ما

تحقت ما بتتعلق.

لهاي بتسبه طريقة 2

بس ما غنا condition

4- Newton's method. → هاي الطريقة

↳ modified newton's method

يعتمد على

derivation of function

له نفس طريقة نيوتن بس

مشقة ثانية.

5- Miller's method. → طريقة سريعة بس فيها

خطوات كثيرة عشان اوجد

6- Fixed point iteration.

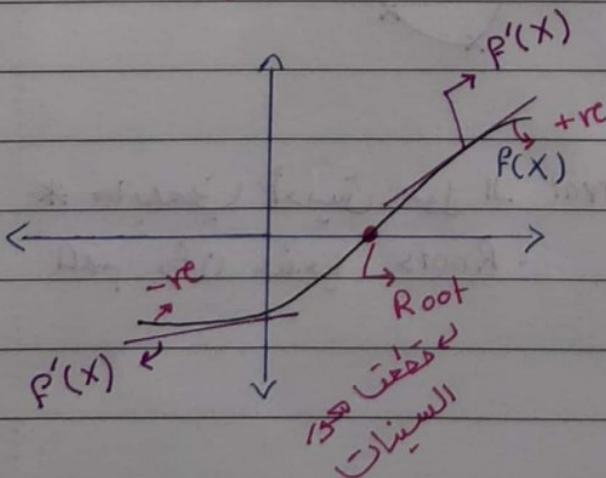
حل

له يعتمد على كيف بيدي اعل

Rewrite للاختار.

Roots :-

①



← ما بتغير إشارة الاختار

لازم اعرف النوع عشي

Root بينهم

← ما تكون $f'(x)$ نفس الإشارة

تكون غنا single root

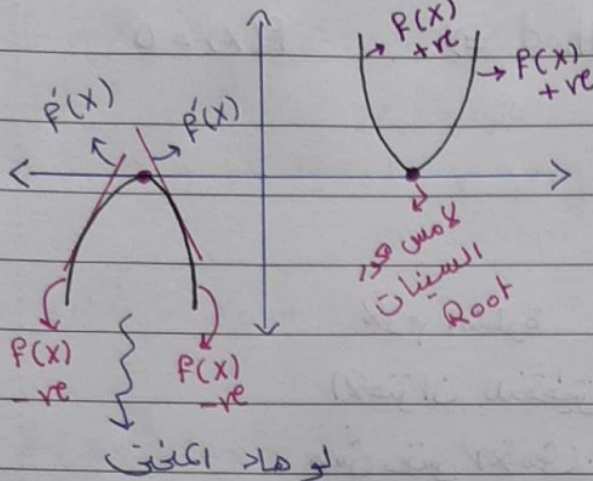
← $f'(x)$ لا بتغير

does not change

ask, believe, & recieve

NOTEBOOK

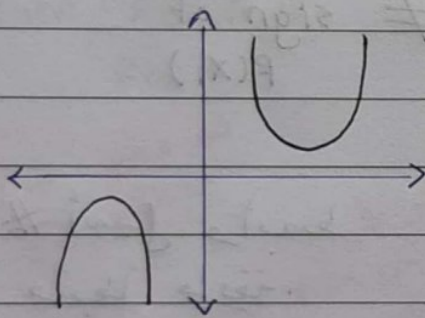
(2)



⇒ double Root
(even number of
Roots)

- * sign of $P(x)$ does not change.
- * sign of $P'(x)$ change.
- * $P''(x)$ does not change.

(3)

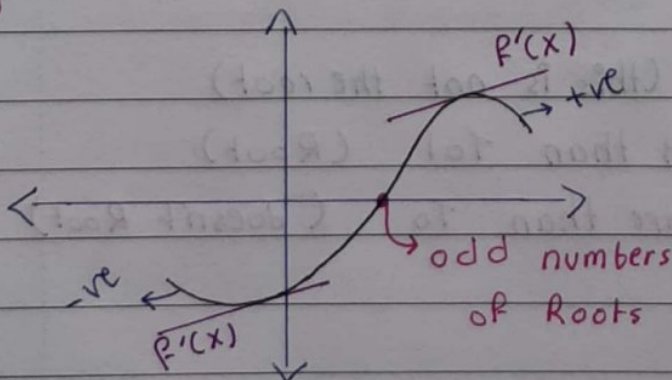


→ imaginary Root
عنا

ممن موجودة على الـ
x-axis
عن طريق -

Newton's & Miller's method

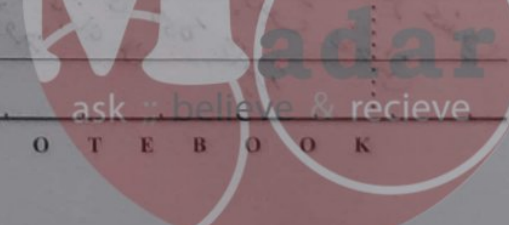
(4)



* نفس شروط أول حالة

بس الاختلاف الوحيد
ان هون

$P'(x) \rightarrow$ sign change.

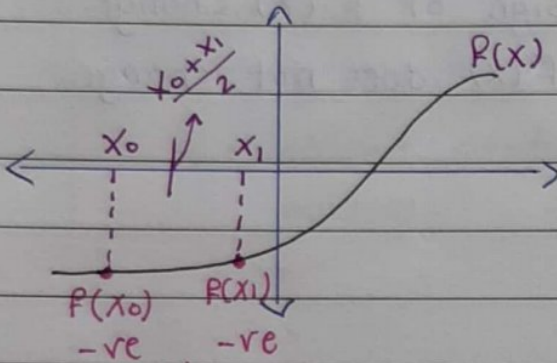


1- Bisection (mid point) method $\Rightarrow P(x) = 0$

لأعطيني نقطتين وأنا يوجد
القيمة لي بالنهاية.

* Two initial guesses * $\rightarrow$ لازم إشارة

الامتزان للنقطتين
ممن نفس الإشارتي.

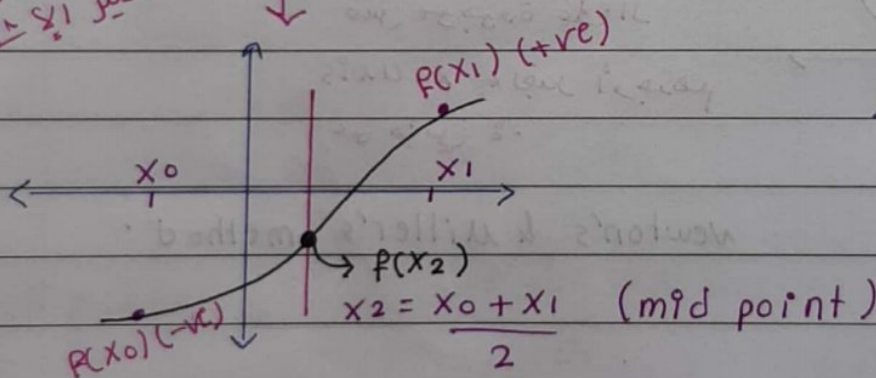


لما يعطينا قيمة (نقطتين) بحسب

$P(x)$ إلهم ويتأكد أنو الإشارات مختلفة.

نفس الإشارة
بالتالي لازم أعير
وحدة عشوائية
تغير الإشارة.

sign of $P(x_0) \neq$ sign of $P(x_1)$



أسهل وأبسط
وأبسط طريقة.

$P(x_2) \neq 0$ (this is not the root)

$\rightarrow P(x_2)$ less than Tol (Root)

$\rightarrow P(x_2)$ more than Tol (doesn't Root)

في هلي الحالة جاز عندي
نقطتين
وبنعمل
مع الأخطاء
التي تكون
تتحقق.

1- x_0, x_1 given guesses.

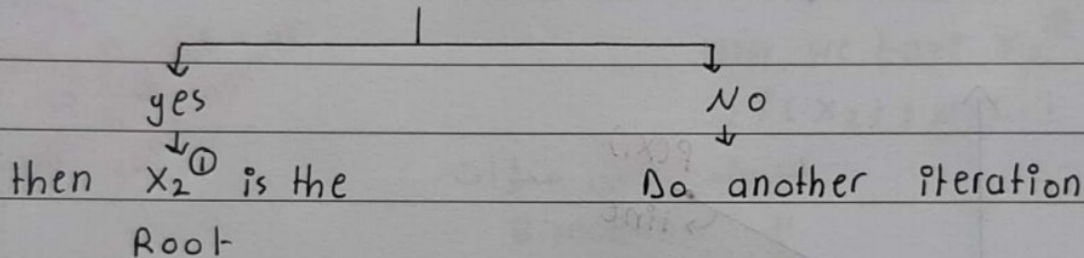
2- $f(x_0), f(x_1) \rightarrow$ compare sign.

sign of $f(x_0) \neq$ sign of $f(x_1) \rightarrow$ proceed.

3- $x_2^{(1)} = \frac{x_0 + x_1}{2}$

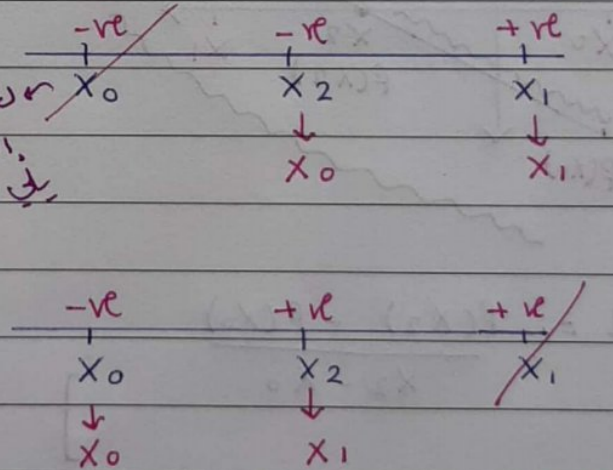
4- $f(x_2^{(1)}) \rightarrow$ if $|f(x_2^{(1)})| \leq \text{Tol}$

5- if $|f(x_2^{(1)})| \leq \text{Tol}$



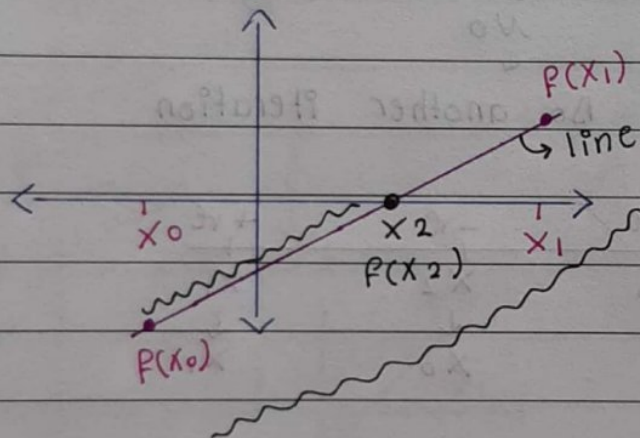
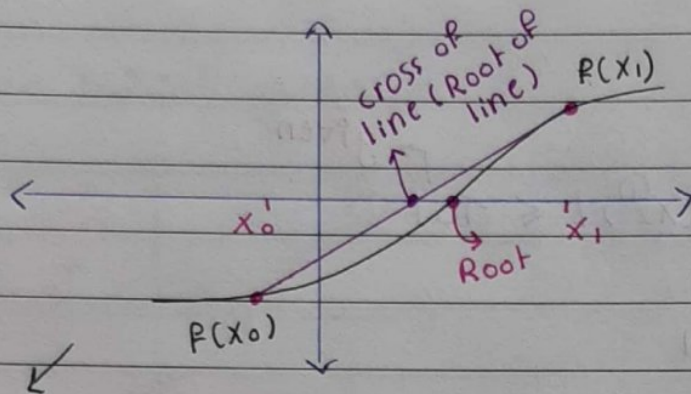
لـ بفضل أهل لغات
ما يتحقق الحل.

لـ نعينها لأن
الها نفس إشارة
لـ بالشئ



2- False position method $\Rightarrow$

- Two initial guesses x_0, x_1 .
- $\text{sign } f(x_0) \neq \text{sign } f(x_1)$



$$\text{slop 1} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\text{slop 1} = \text{slop 2}$$

$$\text{slop 2} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



$$\frac{P(x_2) - P(x_0)}{(x_2) - x_0} = \frac{P(x_1) - P(x_0)}{x_1 - x_0}$$

zero $\rightarrow$ unknown

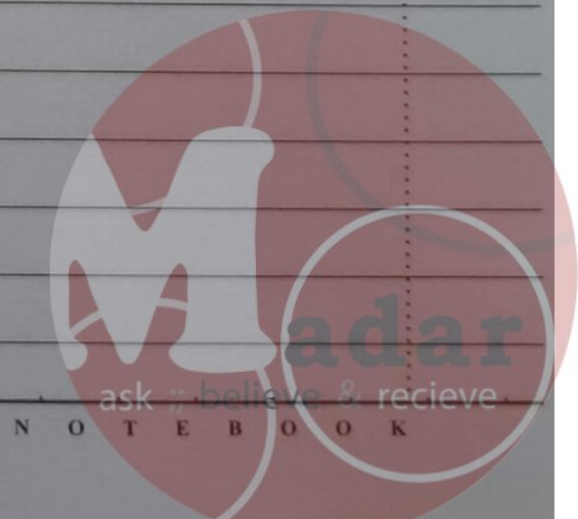
$$x_2 = x_0 - \frac{P(x_0) * (x_0 - x_1)}{P(x_0) - P(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1) * (x_1 - x_0)}{P(x_1) - P(x_0)}$$

الحل
الحال
must give the
same answer

now we have x_2 ^①
 $|P(x_2)| \leq T_0$

بشكل نفس الخطوات
Bisection method



3 - secant method $\Rightarrow$ نفسها نفس الـ False position ، فقط الاختلاف بالـ condition

$$\Rightarrow \text{sign}_{f(x_0)} = \text{sign}_{f(x_1)} \quad x_0, x_1 \text{ (initial guesses)}$$

there is no condition on sign

$$\Rightarrow \text{sign}_{f(x_0)} \neq \text{sign}_{f(x_1)}$$

نفس أو عكس الإشارة تبعاً لها

1 - $f(x_0)$ & $f(x_1)$ بنسبهم

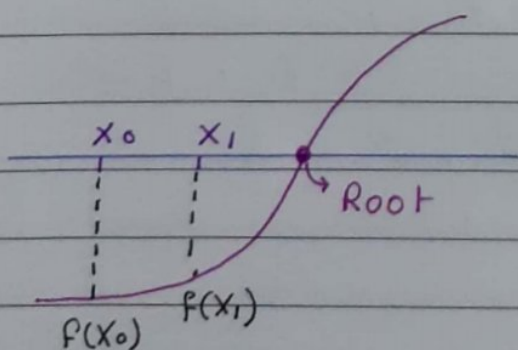
2 - $|f(x_0)|$ & $|f(x_1)| \rightarrow x_0$ أي إليها أكبر هي ستكون x_0

if $|f(x_0)| > |f(x_1)| \rightarrow$ then keep $x_0 = x_0$
 $x_1 = x_1$

$\rightarrow$ then calculate x_2 according to the formula.

if $|f(x_0)| < |f(x_1)| \rightarrow$ then we have to swap the value $x_0 = x_1$ $x_1 = x_0$

$\rightarrow$ then proceed to calculate x_2 .



$$\rightarrow |f(x_0)| > |f(x_1)|$$

بشكل ، أما إذا العكس بنسبهم ،
هنا الخطوة بس بأول مرة بياقي
الـ iteration ما بتغير هاي الخطوة
دائماً بتلغي x_0 وبتلغي .

Example 8-

$$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

$$\text{Tolerance} = 1 \times 10^{-8}$$

$$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$$

1 Bisection method 8-

$$f(x_0) = f(0) = 3(0) + \sin(0) - e^0 = -1$$

$$f(x_1) = f(1) = 3(1) + \sin(1) - e^1 = 1.123189156$$

$$\begin{array}{ccc} \text{sign } f(x_0) & \neq & \text{sign } f(x_1) \\ -ve & & +ve \end{array}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

$$f(x_2^{(1)}) = 3(0.5) + \sin(0.5) - e^{0.5} = 0.330704268$$

$$|0.330704268| > 1 \times 10^{-8}$$

$\rightarrow x_2 = 0.5$ is not a Root

	x_0	$x_2^{(1)}$	x_1
	0	0.5	1
sign $f(x)$	-ve	+ve	+ve
	$\downarrow$	$\downarrow$ (new)	
	x_0	x_1	

← بكل مرة يطلع عنا حل واحد

لو بدنا أوجد باقي الحلول بغير

• initial guesses

← مش هنزوري أهل بطريقتين يطلع

عندي نفس الجواب بالتقريب ، المهم

كل مرة يطلع حل .



$$X_2^{(2)} = \frac{X_0 + X_1^{new}}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$$

$$P(X_2^{(2)}) = 3(0.25) + \sin(0.25) - e^{0.25} = -0.28662$$

$$|-0.28662| > 1 \times 10^{-8}$$

لأنه لا نحتاج تنبئه إليها
متقنة مطلقة. $\rightarrow X_2^{(2)}$ is not a Root

بنفعل نكمل لغاية ما

$$|P(X_2)| < T_0$$

[2] False position :-

$$P(X_0) = -1$$

$$P(X_1) = 1.123189156$$

$$\begin{array}{cc} \text{sign } P(X_0) & \neq & \text{sign } P(X_1) \\ -ve & & +ve \end{array}$$

$$X_2^{(1)} = X_0 - \frac{P(X_0)(X_0 - X_1)}{P(X_0) - P(X_1)} = 0.04709895947$$

$$P(X_2^{(1)}) = 0.265158$$

$$|0.265158| > 1 \times 10^{-8}$$



	x_0	$x_2^{(1)}$	x_1
sign	-ve	+ve	+ve
$P(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	x_0	x_1^{new}	

$$x_2^{(2)} = 0 - (-1) * \left(\frac{0 - 0.4709895947}{(-1) - (0.265158)} \right)$$

$$= 0.37227705$$

$$P(x_2^{(2)}) = 0.0295336638$$

$$|0.0295336638| > 1 \times 10^{-8}$$

لـ بدنا نكمل

3 Secant method :-

$$P(x_0) = -1$$

$$P(x_1) = 1.123189156$$

مكننا بهاي الطريقة

صا بهي 191 نفس

الاشارة اولا

$$|P(x_0)| = 1$$

$$|P(x_1)| = 1.123189156$$

$$|P(x_1)| > |P(x_0)|$$

→ then swap the values

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0$$



$$\begin{aligned}
 x_2^{(1)} &= x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \\
 &= 1 - \frac{(1.123189156)(1 - 0)}{(1.123189156 - (-1))} \\
 &= 0.4709895947
 \end{aligned}$$

$$f(x_2^{(1)}) = 0.2651588161$$

$|0.2651588161| > 1 \times 10^{-8}$
 $\rightarrow$ Eliminate x_0 & rename

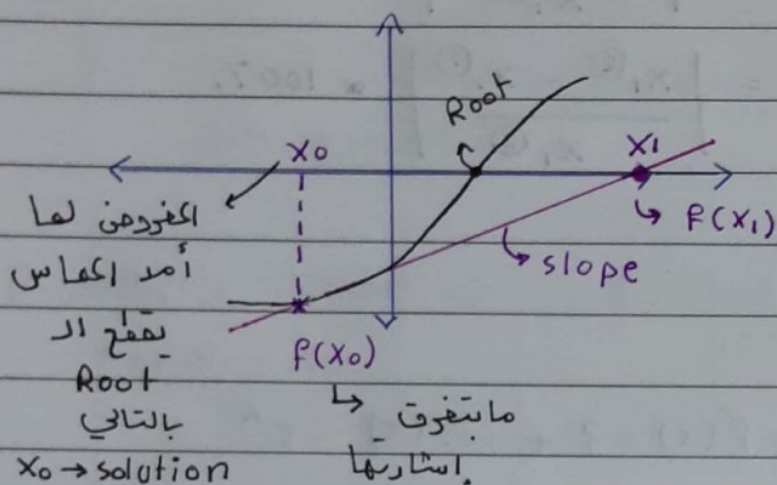
$$\begin{aligned}
 x_0 &= x_1 & x_1 &= x_2^{(1)} \\
 x_0 &= 0 & x_1 &= 0.4709895947
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2^{(2)} &= 0 - \frac{(-1)(0 - 0.4709895947)}{(-1 - (0.265158))} \\
 &= 0.3722770612
 \end{aligned}$$

$$|0.3722770612| > 1 \times 10^{-8}$$

بنا نكمل



4- newtons method $\Rightarrow$ one initial guess
فتأخذ

$$\text{slope} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

 $x_1 \rightarrow \text{Root}$

$$f(x_1) = \text{zero}$$

$$\text{slope} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{\text{slope}} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\text{slope}}$$

ملاحظة من
السؤال

$$\text{slope} \rightarrow f'(x_0)$$

slope at x₀

$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$|f(x_1^{(1)})| > T_{ol} \\ \leq T_{ol}$$

another iteration $\rightarrow$ eliminate x_0 & substitute.by $x_1^{(1)} \Rightarrow x_0 = x_1^{(1)} \rightarrow$ do the iteration.

$$x_1^{(1)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

$$1^{st} \rightarrow x_0, x_1^{(1)} \rightarrow \% RE = \left| \frac{x_1^{(1)} - x_0}{x_1^{(1)}} \right| \times 100\%$$

$$2^{nd} \rightarrow \overset{\text{new } x_0}{x_1^{(1)}}, x_1^{(2)} \rightarrow \% RE = \left| \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}} \right| \times 100\%$$

$$3^{rd} \rightarrow \overset{\text{new } x_0}{x_1^{(2)}}, x_1^{(3)}$$

Example :-

$$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x \rightarrow f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$$

$$x_0 = 1.2$$

$$x_1^{(1)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.2 - \frac{3(1.2) + \sin(1.2) - e^{1.2}}{3 + \cos(1.2) - e^{1.2}}$$

$$x_1^{(1)} = -27.4908$$

$$f(x_1^{(1)}) = 3(-27.4908) + \sin(-27.4908) - e^{-27.4908} = 83.1781$$

$$|83.1781| > 101$$

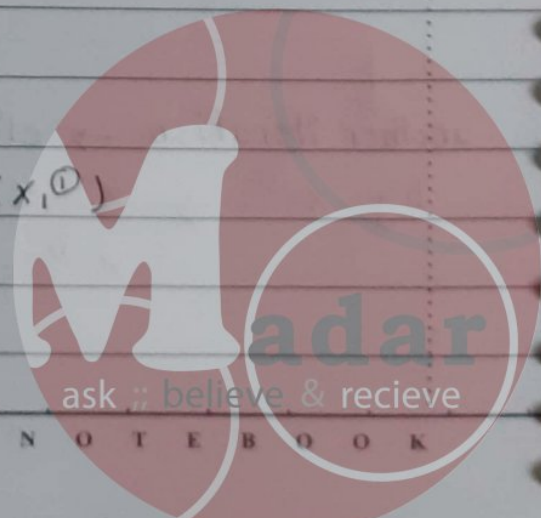
$$x_0 = x_1^{(1)} \leftarrow$$

← ونجعل كمان
iteration

$$x_1^{(2)} = -27.4908 + \frac{83.1781}{2.291594} \rightarrow f'(x_1^{(1)})$$

$$x_1^{(2)} = 8.80628$$

$$|8.80628| > 101$$



$$x_1^{(3)} = 8.80628 + 6649.04 = 7.80998$$

$$- 6673.8$$

$$|7.80998| > Tol$$

← ونرجع نعمل

5- Miller's Method $\Rightarrow$ 3 initial guesser

$$x_0, x_1, x_2$$

↓ $\hookrightarrow$ are given

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2)$$

arrange the values $\Rightarrow$

$\begin{array}{ccccc} \text{small} & & \text{mid} & & \text{big} \\ \swarrow & & \uparrow & & \searrow \\ x_2 & < & x_0 & < & x_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x_2) & & f(x_0) & & f(x_1) \end{array}$

← أعل فلوقة يرتب العتيم من
الأصغر للأكبر

كل مرة بعمل iteration
ارجع اربا مرة ثانية

Calculate :-

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

↙ slope
(الميل الكبير)

$$c_2 = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

↙ slope
بين x_0 و x_1

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{x_0 - x_2}$$

↙ slope

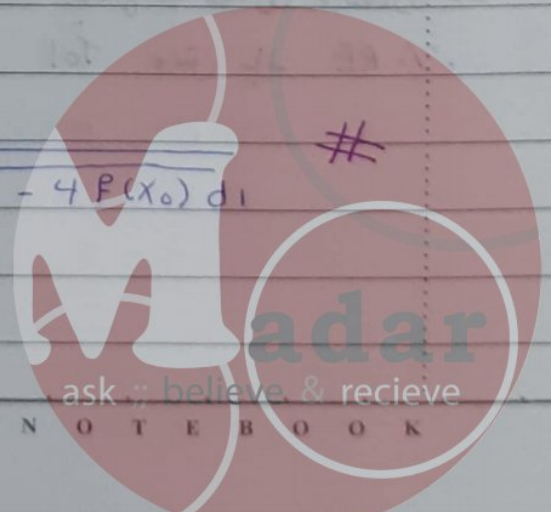
For calculated value

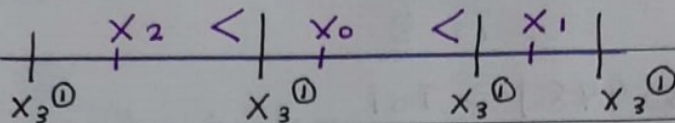
$$S = c_2 - d_1(x_0 - x_1)$$

$$x_3^{(1)} = x_0 - 2f(x_0)$$

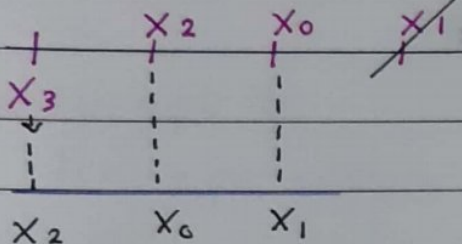
$$x_3^{(1)} = x_0 - \frac{2f(x_0)}{\text{sign } S \sqrt{S^2 - 4f(x_0)d_1}}$$

← باخذها مثل ما هي مع
إشارتها (+, -)
← الإشارة فقط
← من الحارة

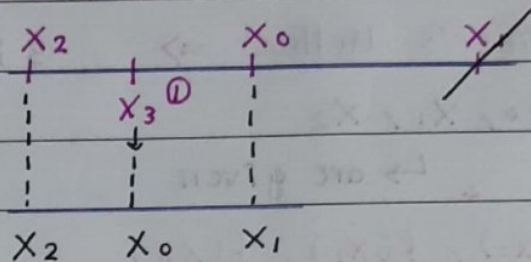




Case 1 :-

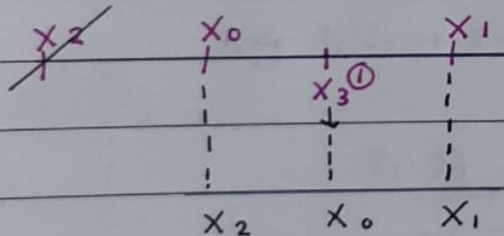


Case 2 :-

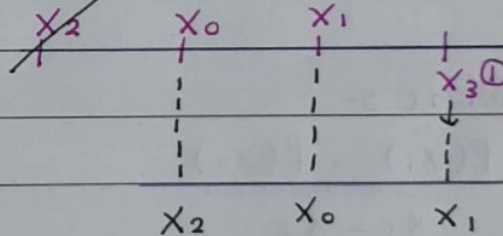


← لازم أرتب وأخبر
السفينة ويرجع بعيد
الخطوات مرة ثانية

Case 3 :-



Case 4 :-



$$|P(x_3^{(1)})| \leq \gamma \cdot T_0$$

لـ بفضل لعا نَعَارِنَا ، نَعَارِنَا لـ
Tol مش بال RE % .



=> Miller's method → 3 initial guess

$$x_2 < x_0 < x_1$$

هبط
لا نهضنا
اشار رقم
← $f(x_2)$ $f(x_0)$ $f(x_1)$

Example :-

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

لـ نوجد هـا مـنـا لـ
mid point

$$\begin{array}{ccc} 0 & < & 0.5 & < & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_2 & & x_0 & & x_1 \end{array}$$

$$f_2(0) = -1$$

$$f_0(0.5) = 0.3307042679$$

$$f_1(1) = 1.123189156$$

$$c_1 = \frac{1.123189156 - (-1)}{1 - 0} = 2.123189156$$

$$c_2 = \frac{0.3307042679 - 1.123189156}{0.5 - 1} = 1.584969792$$

$$d_1 = \frac{1.584969792 - 2.123189156}{0.5 - 0} = -1.0764$$

$$s = 1.584969792 + (-1.0764)(0.5 - 1) = 2.123189772$$

$$x^{(1)} = 0.5 - \left\{ \frac{2(0.3307042679)}{2.123189772 + \sqrt{(2.123189772)^2 + (-4)(0.3307042679)}} \right\}$$

$$= 0.3417158$$

$$P(x^{(1)}) \rightarrow |P(x^{(1)})| > \leq Tol$$

↳ second iteration

x_2	$x^{(1)}$	x_0	x_1
0	0.3417	0.5	1
↓	↓	↓	
x_2	x_0	x_1	

لـ يرجع بعيد نفس
البيانات السابقة
ويكمل

6 - Fixed point iteration $\Rightarrow$

$$f(x) = 0$$

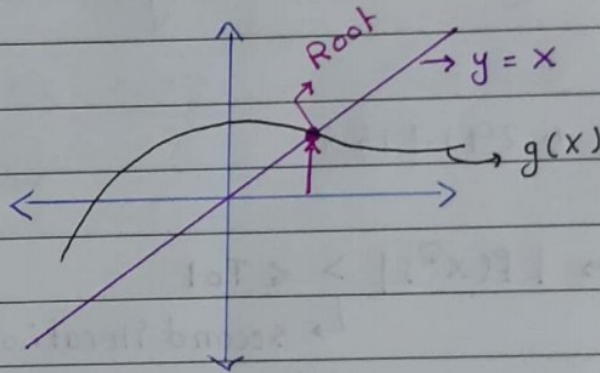
$\hookrightarrow$ generation new forms

$$x = g(x)$$

$$y = x$$

$$y = g(x)$$

x	y	g(x)
-1	-1	()
0	0	()
2	2	()



راح يطلع معي قيم
باخذها هي دالة
و برسمها هو برسم
 $x = y$

$\Rightarrow$ Numerically :-

x_0 (initial guess)

لما عليها أي
شروط باخذها
و برسمها هي قيمتها
g

$g_1(x) \rightarrow 1^{st}$ iteration

$$x_1 = g_1(x_0)$$

$x_1 = x_0$ إذا
solution

$$\%RE = \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| \times 100\% \leq Tol$$

↳ x_1 is the Root for $P(x)$

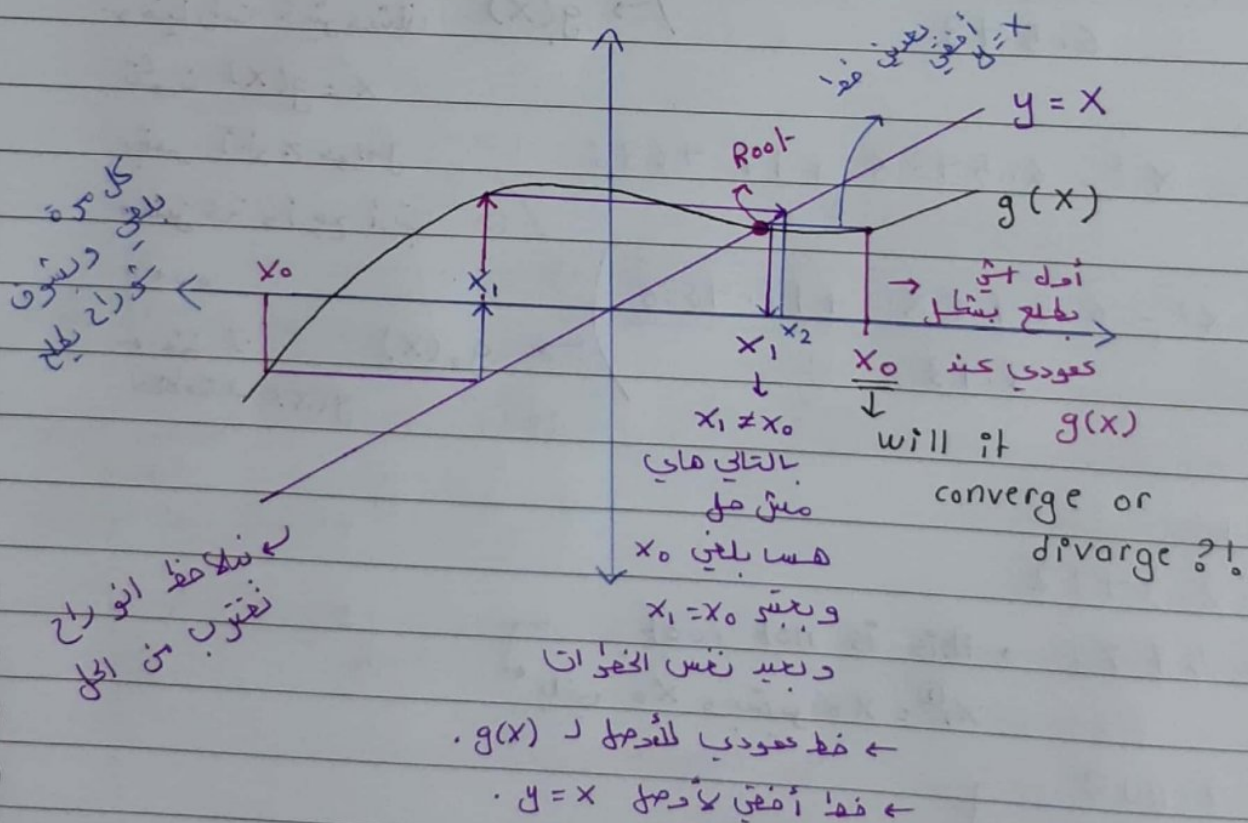
if $|\%RE| > Tol$, Then

$$x_0 = x_1$$

$$x_2 = g(x_1) \text{ or } g(x_0)$$

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \times 100\% \leq Tol$$

solution ↳ another iteration



Example :-

$$P(X) = X^3 - 3.13X^2 - 6.543X + 17.4636$$

← عدي

3 Roots

أول خطوة بترتيب الاختزان

ونستخرج عن $P(X)$ واستخلص منهااختزان جديد $g(X)$ بدلالة X

$$X = g(X)$$

$$6.543X = X^3 - 3.13X^2 + 17.4636$$

$$X = \left(\frac{X^3 - 3.13X^2 + 17.4636}{6.543} \right) \rightarrow g_1(X)$$

في عنا حالات كثير

دخيارات كثير عشاق

تكون $X = g(X)$

$$3.13X^2 = X^3 - 6.543X + 17.4636$$

بقدر أخرج عوامل

مشتركة وأرجع ترتيب

.....

$$X = \left(\frac{X^3 - 6.543X + 17.4636}{3.13} \right) \rightarrow g_2(X)$$

عنا 7

حالات $g(X)$

$$X_0 = 1$$

$$X_1^{(1)} = 2.3432$$

$$\%RE = 57\% \rightarrow \text{this is not root}$$

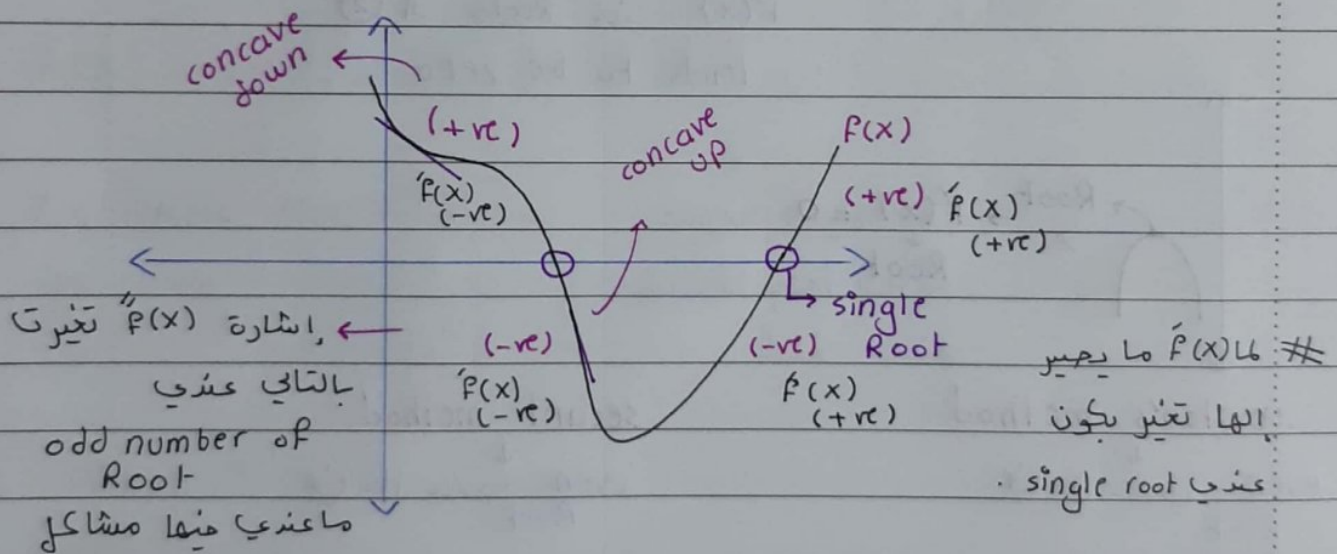
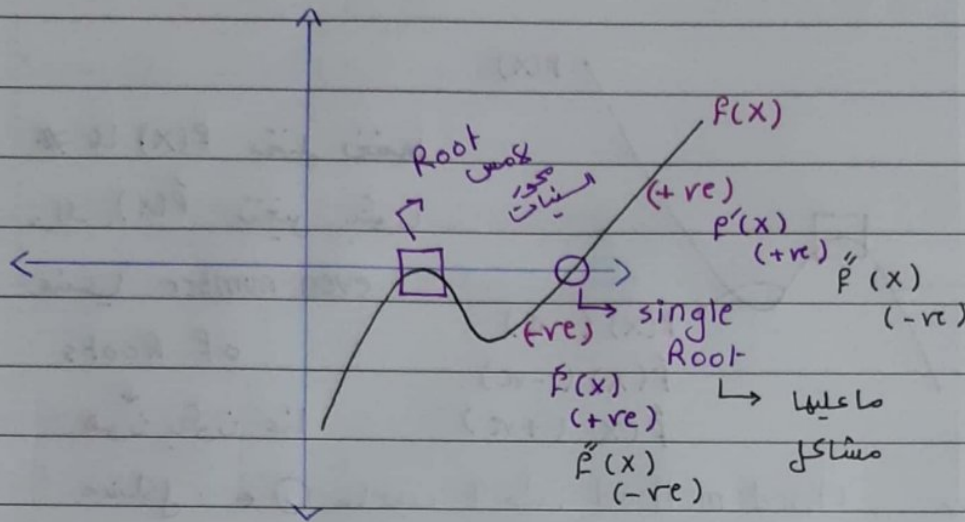
$$X_1^{(1)} = X_0 \text{ ونقيس } X_0$$

$$X_1^{(2)} = 2.008$$

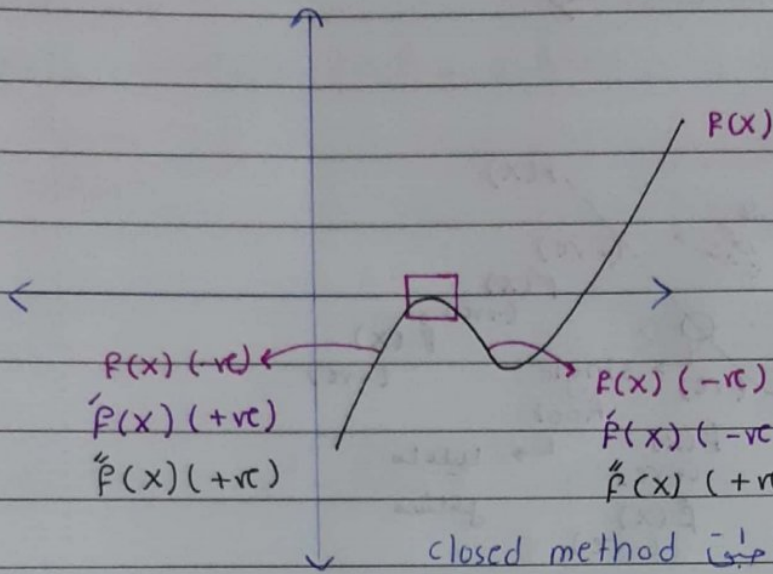
$$\%RE \text{ اختزان } \rightarrow$$

نقيس أقل من الـ

Tolerance.

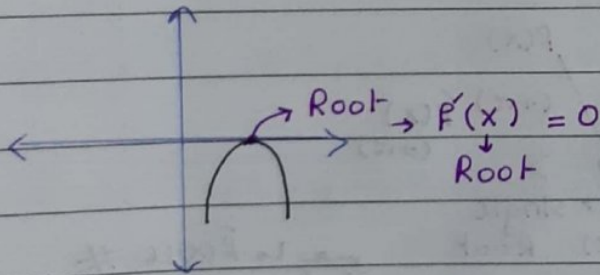
7 - Modified Newton's method $\Rightarrow$ 

* اذا المشتقة الثانية هي لي بتكم اذا عندي single Root
يعني cross على الـ x axis
اذا تغيرت يكون عندي (odd number of Root)



$P(x)$ لا يتغير
وال $P'(x)$ تتغير يكون
عني even number
of Roots
هون يكون عنا

مشاكل. ① ما يقدر احيى closed method
 $P(x)$ نفس الإشارة .
② ان Roots عند $P'(x)$
tends to be zero



Newton's method

even في حال عني
Root

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

closer to
zero

secant method

في حال عني
Root

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)(x_0 - x_1)}{(P(x_0) - P(x_1))}$$

closer
to zero

هذه الطرق عني يكون كثير بمشاكل

⇒ Modified Newton's method :-

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) * f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - f(x_0) * f''(x_0)}$$

← هون ما عندي مشاكل بالحكام بسبب وجود $f''(x_0)$ ، بالتالي هاي طريقة سريعة

Example :-

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

4 Roots ← $x_0 = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$$

1 - simple Newton :-

ما أسوف الطريقة

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

حاولت انهم حللي انو عندي غلط

$$f(0) = 3$$

$$f'(0) = -10$$

$$x_1^{(1)} = 0 - \frac{3}{(-10)} = 0.3$$

$$f(0.3) = 0.9261$$

$$f'(0.3) = -4.312$$

$$x_2^{(2)} = 0.3 - \frac{0.9261}{-4.312} = 0.51477$$

2- Modified Newton's method :-

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$$

$$f''(0) = 24$$

هنا الطريقة تنتج في حال

عندي odd , even
Root

$$x_1^{(1)} = x_0 - \frac{f(x_0) f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - f(x_0) f''(x_0)} = 0 - \frac{(3)(-10)}{(-10)^2 - (3)(24)} = 1.07 \dots$$

← هنا خطوة من ال 0 للواحد يعني

أنا حوت هوية من ال Root.

Example :-

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$x_0 = 0$$

$$Tol = 10^{-8}$$

→ Root →

3
راح يطالع هنا

Root عند هاي القيم

ال Root الثالث ما راح

يبين لأنو مكرر

ما بتالي عندي even
Root.

System of linear equations 8-

$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
 $\begin{matrix} \text{element} \\ \downarrow \\ a_{11} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 2 \times 2 \\ \downarrow \\ \text{Row} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{column} \\ \downarrow \\ \text{vector} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{constant s} \\ \downarrow \\ \text{Row vector} \end{matrix}$
 $\{A\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$
 $\{B\} = \{c_1 \ c_2\}$

ممكن تكون أرقام كالهيا أو مجهولة بـ
 vector variable
 الصف واحد وعمودين
 عمود واحد وصفين
 الصف الأول والثاني

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

$$-x_1 + 5x_2 = -3$$

عنا متغيرين
يعني لازم يكون
عنه معادلتين

هدول مباشرة نحلهم

حذف وبقوة

$$[A] \{x\} = \{c\}$$

$\downarrow$ matrix $\downarrow$ vector $\downarrow$ vector
 $\downarrow$ element $\downarrow$ variable $\downarrow$ constant
 معاملات المتغيرات في المعادلة
 المتغيرات في المعادلة
 المتغيرات في المعادلة

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

2×2 2×1 2×1

نضرب كل صف
في الصفين
نضرب الصفين
نضرب الصفين

عشان
أختر ب هذول لازم
يكونوا متساويين

ask ; believe & recieve

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ما يقدر أجمع وأخرج بهاي الحالة لأن
size لا matrix مختلف كراح يفيل عنا

element ما دخلو بالحسابات

size of matrix must be equal

no. of column = no. of row

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

هون
يقدر أجمع وأخرج عنان نفس
size

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[A] * [B] \rightarrow \begin{bmatrix} \text{matrix} \end{bmatrix}_{n \times L}$$

$n \times m$ $m \times L$
متساويات

ل في حال الخزن لازم غير الأعدرة
يساري عدد المصفوف هو شرط نفس
size

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

3x2

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

2x4

متساويات بالتالي بعد اُضرب

$$[A \cdot B] = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & \dots \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & \dots \\ (a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21}) & \dots \end{bmatrix}$$

3x4

كل Row يضربها بكل

الأعمدة و بكل الباقي

راح تطلع matrix ال size

إلها

3x4

صفوف

$$\Rightarrow A(B+C) = AB + AC$$

$$\Rightarrow A(BC) = (AB)(C)$$

$[A] \div [B] \rightarrow$ there is no division operation

in matrix

$$[A][B]^{-1}$$

inverse

$$[A]\{x\} = \{c\}$$

$$[A]^{-1}\{c\} = \{x\}$$

↓ احنا بدنا نعرف كيف نوجد ال

inverse

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

المصفوفات العكس → Transpose
والأعمدة
مصفوف

$$[A]_{(n \times m)} = [A]^T_{(m \times n)} = [B]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \rightarrow [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\Rightarrow [A][B] \neq [B][A]$$

$$\Rightarrow (AB)^T = (B)^T (A)^T \neq (A)^T (B)^T$$

لـ ما راج يعطوا نفس الجواب

$$\Rightarrow (A+B)^T = (A)^T + (B)^T$$

برفضو لو كانت
هنا الأرقام
راج
يعمل
نفس الشيء
ويطرح نفس
الجواب

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \rightarrow \text{main diagonal matrix}$$

الـ matrix بتفضل مثل ما هي
إذا عكست Transpose

Diagonal →
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓ $\text{diagonal} = 1$
unit diagonal matrix

← مثل مندرج تكون هاي
كلها 1

Banded →
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

↓
يكون فيها
3 diagonal

upper adjusant diagonal
main diagonal
lower adjusant diagonal

على الأقل وحدة هينهم
 $0 \neq$ ، أما الثانية
عليه لو صغر

upper triangle matrix →
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

لـ لازم على الأرقام يلي تحت
الـ main diagonal تكون
أصغر أما يلي فوقه عادي

lower triangle matrix →
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ask :: believe & recieve

NOTI BOOK

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow \text{Det} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Singular & non singular matrix :-

no solution

→ there is a

solution

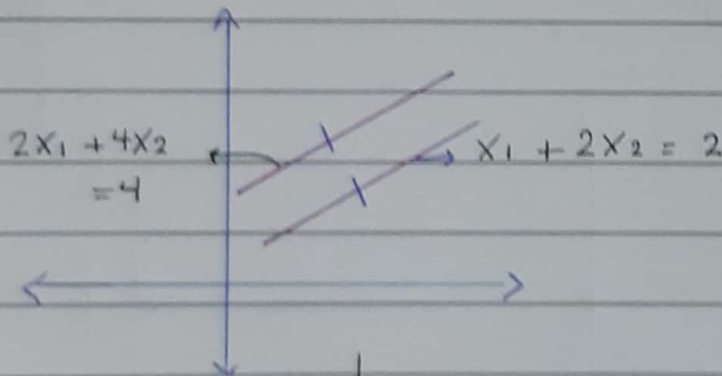
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

why I will not be able to find the solution for this system?

$$\rightarrow \text{Det} = 0 = 1 \times 4 - 2 \times 2 = \text{zero}$$

matrix is singular

so there is no solution



عشان أملا matrix

لازم يكون عني

non-singular

عشان هيك لما يكون

عنا singular ما غنا

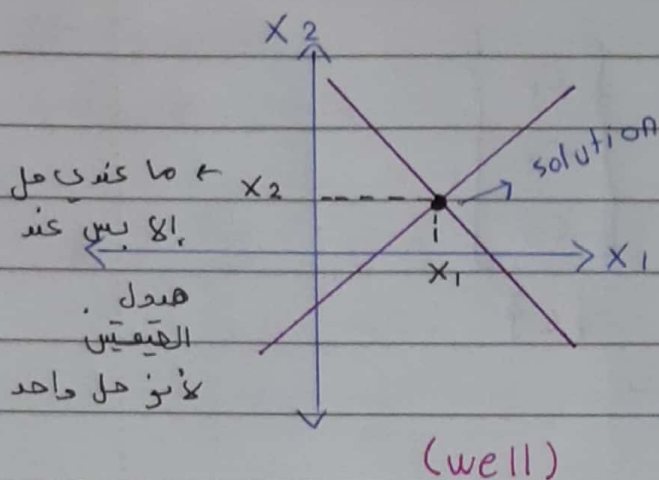
حل لأنو عنا parallel

equations

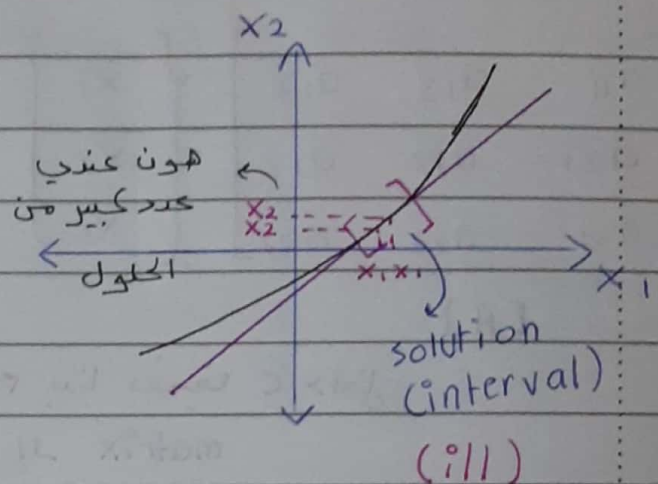
ما عني حل

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK



$\text{Det} \neq \text{zero}$
 $[A]$



$\text{Det} \approx \text{zero}$
 $[A]$

مربى للمغز بالسببة
 للأرقام بي لار
 matrix

$$\{x\} [A] = \{c\} \Rightarrow \{x\} = ([A]^{-1}) \{c\}$$

لبي ارجدها وهي اها
 علامة لار Det

$[A] = [A]^{-1} \rightarrow$ عشان تكون اها inverse لازم

تكون non-singular او singular
 ما اها inverse

adar
 ask ; believe & recieve

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$[A]$ $\{C\}$

بداً بضيف $C > \text{اخر}$

matrix ال

a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1	$\rightarrow$ أي تغيير يجعل على ال Row سواء حذب حصة .. يجعل العملية رجسها على ال C .
a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3	

Rank of matrix:-

the order of the largest square matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{هاي ال matrix باخذ منها}$$

3×4 أي matrix (3x3) من أي جهة
بسن لازم هاي ال matrix تكون
non-singular

ال 13 جوبنا على (3x3) وطبع ال $\text{Det} = 0$ سكي
بنزل ال (2x2) وباخذ على الخيارات الممكنة، أي

ما على
1st degree Rank

درجة بطبع ال $\text{Det} \neq 0$
rank $\rightarrow$ second order
(second degree)

ما تكون (4x4) اول احتمال (4x4) بعدين (3x3)
بعدين (2x2) المهم $\text{Det} \neq 0$ لو حدة بينهم على الآخر .

Example :-

Rank

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 34 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \quad 3 \times 4$$

↓
matrix بي أدر على
تكون 3×3

$$[B]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 42 & 24 \\ 21 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

Det ?!

$$\text{Det} = 3(42 \times 0 - (-21 \times 24)) - 0(-6 \times 0 - 24 \times 21) + 2(-6 \times -21 - 42 \times 21) = 1512 - 0 - 1512 = 0$$

↓
Rank $\neq 3$

$$[C]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} = (3 \times 42) + (6 \times 0) = 126$$

Rank = 2

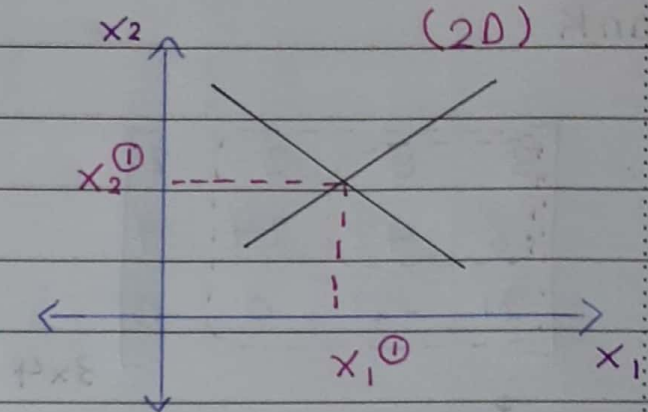
adar
ask ; believe & recieve

NOTI BOOK

Small system of linear equation :-

1 - Graphically :-

limited maximum 3 variable unknown



2 - Elimination of unknown :-

أعوذ من المعادلات بالحذف ومن متجه لها يكون عندي أكثر من 3 معادلات.

max. For 3 unknowns

* Example :-

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 5 \\ + x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \rightarrow x_2 = (7 - x_1)/3$$

$$\rightarrow -2x_1 + 4\left(\frac{7 - x_1}{3}\right) = 5 \rightarrow x_1 = \square$$

3 - Cramer's Rule :-

$$[A][X] = \{C\}$$

↓

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

هذا المصفوفة
المصفوفة [A]
والمصفوفة [X]
والمصفوفة [C]
مصفوفة

$$X_1 = \text{Det} \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Det A

$$X_2 = \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Det A

هنا الطريقة مس
منفعة لأكثر من
3 variable
max. 3 variable

يُحذف العود
المزبور بالـ x لي يدي
أياها ويجد مكانه الـ c
ويوجد الـ det لا matrix
الجديدة على الـ det للعدفة.

Det A

Example :-

$$7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -49$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5$$

$$3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = -84$$

هنا الحل لا يحس

Numerical

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49 \\ 5 \\ -84 \end{bmatrix}$$

↓ ↓ ↓
[A] {x} {c}

$$\text{Det } A = 7(-2 \times 10 - (-5 \times -6)) - (-3)(1 \times 10 + 15) + 3(-6 + 6)$$

$$= -275 \text{ (non-singular)} \rightarrow \text{Rank} = 3$$

ask ; believe & recieve

$$X_1 = \frac{746}{-275} = -2.712727273$$

$$X_2 = \frac{-1662}{-275} = 6.043636364$$

$$X_3 = \frac{1089}{-275} = -3.96$$

large system of linear equation :-

(2 & above unknowns)

عدد الجاهل غير محدود

1 - Gauss elimination

2 - Gauss Jordan

3 - Thomas

4 - LU Factorization

} Direct methods
(no need for any guess)

5 - Gauss siegel } Iterative methods

6 - Jacobi

"not direct"

(initial guess (بحتاج

adar
ask ; believe & recieve

Gauss elimination :-

هي الأساس وبدي استخدمها

A - elimination

sys of equation

لأي

B - substitution

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

↓

a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1	augumented matrix	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	c_2		← إذا حذف لي تحت forward elimination
a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3		← إذا حذفنا لي فوق backward elimination

=> first part 3 elimination :-

بهاي الطريقة بس راح نعمل

forward بس

a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1
0	a_{22}	a_{23}	c_2
0	a_{32}	a_{33}	c_3

← عشان أ حذف a_{21} راح أعين a_{22} c_2, a_{23}

← بعمل elimination لكل عمود حال

next ↓

a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1	we make forward elimination
0	a'_{12}	a'_{13}	c_2	
0	0	a_{33}''	c_3''	

ask :: believe & recieve

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$(2) \quad 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \rightarrow \text{only 2 unknown}$$

$$(3) \quad 0 + 0 + a_{33}x_3 = c_3 \rightarrow \text{only one unknown}$$

$$\hookrightarrow x_3 = \frac{c_3}{a_{33}}$$

backward substitution $\rightarrow$ عكس الطريقة لي
حذفت منها.

Gauss elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array} \right]$$

Row 1 مستخدم عشان أهدف عناصر
بالعقد الأول

Row n مستخدم عشان أهدف عناصر
بالعقد n وهكذا...

هنا عقد 1 يعني بي

معادلة لها علامة ب Row 1

Forward elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & c_3 \end{array} \right] \rightarrow \text{Backward substitution}$$

substitution

$$x_3 = \frac{c_3}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{23}(x_3)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \text{بشيء من أول}$$

$$x_2, x_3$$

معادلة له لأن يكون عرفت

ask "believe & recieve

NOTEBOOK

Example :-

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = -10$$

$$2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 44$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -26$$

independent
equation

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -10 \\ 2 & 6 & -4 & 44 \\ -1 & -2 & 5 & -26 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

بدا نختف هـول جـفـهم

* خطوات الـ عشـان أـحـفـ (2) :-

واحد واحد ما جـفـهم مرة

← جـيـب Row 1 جـمـعـها على 11

وحدة إلا إذا كان نفس

← جـنـرـها بـعـكـس الـعـدـلـي بـدي أـحـفـو .

الرقم .

← بـيـطـع عـنا اـنـي بـنـفـيـه pivot equation

عـود أـول بـعـيـن بـدي

← بـفـسـلـها و جـمـعـها لـ Row لـي جـنـها الـعـدـ

استخدم Row 1

لـي بـدي أـحـفـو .

Row 1 :- (بدي أـحـفـ 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -10 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} * -2 \\ \hline 3 \end{array}$$

↓

-2/3 → pivot element

بـدي أـحـرـب كل الـ Row جـنـهـ

↓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1.333 & -0.666 & 6.666 \\ \hline \end{array} \right)$$

← pivot equation (Row 2 جـمـعـها لـ)

Row 1 :- (بدي أحتف -1)

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & -2 & 1 & -10 \\ \frac{3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} \end{array} \right) \times 1 \rightarrow \text{pivot element}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -0.66\bar{6} & 0.33\bar{3} & -3.33\bar{3} \end{array} \right)$$

→ pivot equation (يجمعها ل Row 3)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 7.33\bar{3} & -4.6\bar{6} & 50.6\bar{6} \\ 0 & -2.66\bar{6} & 5.33\bar{3} & -29.3\bar{3} \end{array} \right| \rightarrow \text{Row 1} \rightarrow \text{ما بتغير عليها استي}$$

بدا أحتف هاد ؟!

العود الثاني بستوتم

ال Row 2 عشان أحتف

Row 2 :- (بدي أحتف -2.666)

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 7.33\bar{3} & -4.6\bar{6} & 50.6\bar{6} \\ \frac{0}{7.33\bar{3}} & \frac{7.33\bar{3}}{7.33\bar{3}} & \frac{-4.6\bar{6}}{7.33\bar{3}} & \frac{50.6\bar{6}}{7.33\bar{3}} \end{array} \right) \times 2.66\bar{6} \rightarrow \text{pivot element}$$

a_{22}

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 2.66\bar{6} & -1.69697 & 18.42424 \end{array} \right)$$

→ pivot equation (يجمعها ل Row 3)

ask :: believe & recieve

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 7.333 & -4.666 & 50.66 \\ 0 & 0 & 3.63636 & -10.9091 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

upper triangle matrix main diagonal

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = -10 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$0(x_1) + 7.333x_2 - 4.666x_3 = 50.666 \rightarrow \textcircled{2}$$

$$0(x_1) + 0(x_2) + 3.63636(x_3) = -10.9091 \rightarrow \textcircled{3}$$

هنا
متغيرين

هنا
متغير واحد

Back word substitution

$$x_3 = \frac{c_3}{a_{33}} = \frac{-10.9091}{3.63636} = -3$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{23}(x_3)}{a_{22}} = \frac{50.666 + 4.666(-3)}{7.333} = 5$$

$$x_1 \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -10 \quad (\text{من المعادلة الأولى})$$

↓

$$x_1 = \frac{-10 + 2(5) - (-3)}{3} = 1$$

$$x_1 = 1$$

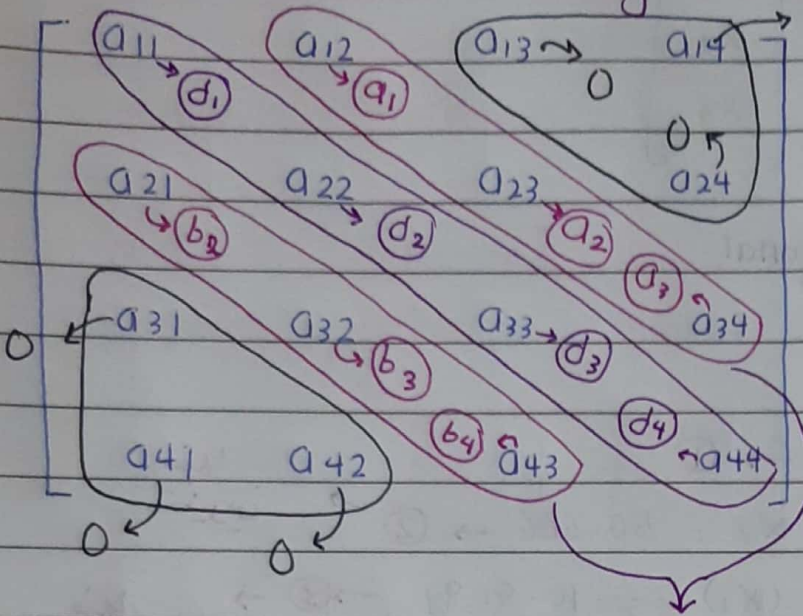
$$x_2 = 5$$

$$x_3 = -3$$

تأكد إذا هيا
الجيم صح عدا
مربوب آخرهم

ask ; believe ; recieve

Thomas method (Tridiagonal) :-



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

بمسئله بدلالة r
(r1, r2, r3, r4)

هذه تكون منهم عناصر اعمالي فتأخرون
تكونوا اعمالي.

main diagonal
كلم ارقام

1 - For the first row only :-

$$A_1 = \frac{a_1}{d_1}$$

$$R_1 = \frac{r_1}{d_1}$$

2 - For all other equation (except the last row) :-
(Row 2, Row 3)

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

$$A_i = \frac{a_i}{d_i - b_i A_{(i-1)}}$$

Refers
to Row

$$d_i - b_i A_{(i-1)}$$

الـ $A_{(i-1)}$ في
Row في قبلها

$$R_i = \frac{r_i - b_i R_{(i-1)}}{d_i - b_i A_{(i-1)}}$$

$$d_i - b_i A_{(i-1)}$$

→ For
Row 2

$$A_2 = \frac{a_2}{d_2 - b_2 A_1}$$

$$R_2 = \frac{r_2 - b_2 R_1}{d_2 - b_2 A_1}$$

→ For
Row 3

$$A_3 = \frac{a_3}{d_3 - b_3 A_2}$$

$$R_3 = \frac{r_3 - b_3 R_2}{d_3 - b_3 A_2}$$

3 - For the last Row :-

$$A_n = 0$$

$$R_n = \frac{r_n - b_n R_{n-1}}{d_n - b_n A_{(n-1)}}$$

4 - Solve by back substitution to find x :-

$$X_n = R_n$$

نبدأ من آخر المعادلات

$$X_i = R_i - A_i X_{(n+1)}$$

نستبدل على $X_{(n+1)}$

بـ $X_{(n+1)}$

$$X_4 = R_4$$

$$X_3 = R_3 - A_3(X_4)$$

$$X_2 = R_2 - A_2(X_3)$$

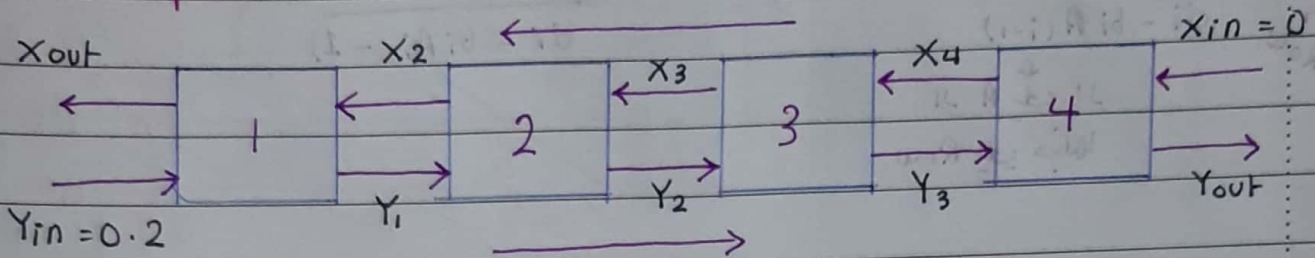
$$X_1 = R_1 - A_1(X_2)$$

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

Example :-

$$F_2 = 600 \text{ kg/h}$$



$$K = \frac{X_i}{Y_i} = 2$$

$$F_1 = 300 \text{ kg/h}$$

X_{out} و Y_{out} ؟!

$$F_1 Y_{in} + F_2 X_2 = F_1 Y_1 + F_2 X_{out} \rightarrow \text{unit ①}$$

$$(300)(0.2) + 600 X_2 = 300 Y_1 + 600 X_{out} \quad \rightarrow X_1$$

↓

$$300 Y_1 + 600 X_1 - 600 X_2 = 60 \rightarrow \text{بدنا نكمل هيك}$$

لاني اعدادات وتخليهم

بدلالة Y

بس نرتب
وتخلي بدلالة Y

↓

$$\textcircled{1} \quad -1500 Y_1 + 1200 Y_2 = -60$$

$$\textcircled{2} \quad 300 Y_1 - 1500 Y_2 + 1200 Y_3 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad 300 Y_2 - 1500 Y_3 + 1200 Y_4 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad 300 Y_3 - 1500 Y_4 = 0$$

ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

$$\begin{bmatrix} -1500 & 1200 & 0 & 0 \\ 300 & -1500 & 1200 & 0 \\ 0 & 300 & -1500 & 1200 \\ 0 & 0 & 300 & -1500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \frac{a_1}{d_1} = \frac{1200}{-1500} = -0.8$$

$$R_1 = \frac{r_1}{d_1} = \frac{-60}{-1500} = 0.04$$

$$A_2 = \frac{a_2}{d_2 - b_2 A_1} = \frac{1200}{-1500 - 300(-0.8)} = -0.9523809$$

$$R_2 = \frac{r_2 - b_2 R_1}{d_2 - b_2 A_1} = \frac{0 - (300)(0.04)}{-1500 - (300)(-0.8)} = 0.00952381$$

$$A_3 = -0.98823529$$

$$R_3 = 0.002352941$$

$$R_4 = Y_4 = 0.00058657$$

↳ Y_{out}

$$Y_3 = R_3 - A_3(Y_4) = 0.002352941 - (-0.98823529)(0.00058657)$$

$$Y_3 = 0.002932610174$$

$$Y_2 = (0.00952381) - (-0.9523809)(0.002932610174)$$

$$Y_2 = 0.01231677192$$

$$Y_1 = (0.04) - (-0.8)(0.01231677192)$$

$$Y_1 = 0.04098534175 \rightarrow X_1 = 2Y_1 = 0.08197068$$

Gauss - Jordan :-

بدينا نعرف كيف
نوجد inverse

$$[A] \{X\} = \{C\} \Rightarrow \{X\} = \frac{\{C\}}{[A]} = [A]^{-1} \{C\}$$

هاي بيدينا
نشتغل عليها

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

بدي احوالها
↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

→ solution for system

$$x_1 = c_1$$

$$x_2 = c_2 \leftarrow \text{الحل بطالع}$$

$$x_3 = c_3 \text{ مباشرة}$$

Row 1 :- (حذف a_{31} و a_{21})

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{11}} \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad \frac{c_1}{a_{11}} \right) \times -a_{21}$$

→ جمعها
Row 2

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{11}} \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad \frac{c_1}{a_{11}} \right) \times -a_{31}$$

→ جمعها
Row 3

pivot equation

ask :: believe & recieve

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{c_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) & a_{23} - a_{21} \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right) & \\ 0 & a_{32} - a_{31} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) & a_{33} - a_{31} \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right) & \end{bmatrix}$$

Example :-

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -16 \\ 44 \\ 26 \end{pmatrix}$$
 كل عناصر هلي
 ال matrix راج تتغير
 solution

Row 1 :- (بدلتا حذف 2، -1)

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & -2 & 1 & -10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \times -2 \rightarrow \text{سيفعلها}$$

Row 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -10 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Row 3}}$$

$$\text{Row1}_{\text{new}} = \frac{\text{Row1}_{\text{all}}}{1} = 1 \quad -0.66\bar{6} \quad 0.33\bar{3} \quad -3.33\bar{3}$$

كل هذه $\rightarrow$ matrix مرتبة

1	-0.666	0.333	-3.333	normalized Row
0	7.333	-4.666	50.666	
0	-2.666	5.333	-29.333	

لأنهم بالعمود الثاني
لنستعمل الـ Row 2

Row 2 :- (بنا حذف -0.666 و -2.666)

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 7.333 & -4.666 & 50.666 \\ 7.333 & 7.333 & 7.333 & 7.333 \end{array} \right) \times 0.666 \rightarrow \text{نضربها لـ Row 1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 7.333 & -4.666 & 50.666 \\ 7.333 & 7.333 & 7.333 & 7.333 \end{array} \right) \times 2.666 \rightarrow \text{نضربها لـ Row 3}$$

$$\text{Row 2} = \text{Row 2} = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -0.6363 & 6.90909 \\ \text{new} & 022 & & \end{array}$$

↓

1	0	-0.09091	1.272727
0	1	-0.6363	6.90909
0	0	3.63636	-10.90909

لأنهم بالعمود الثالث
لنستعمل الـ Row 3

adar
ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

Row 3 :- (بدا حذف -0.09091 -0.63636)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3.63636 & -10.90909 \\ \hline 3.63636 & 3.63636 & 3.63636 & 3.63636 \end{array} \right) \times (0.09091) \rightarrow \text{نضربها لـ Row 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3.63636 & -10.90909 \\ \hline 3.63636 & 3.63636 & 3.63636 & 3.63636 \end{array} \right) \times (-0.6363) \rightarrow \text{نضربها لـ Row 2}$$

$$\text{Row 3 new} = \frac{\text{Row 3}}{a_{33}} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \text{solution}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

$$x_3 = -3$$

How to find an inverse of $[A] \Rightarrow [A]^{-1} :-$

$$\{x\} = [A]^{-1} \{C\}$$

$$(1) [A] \{x\} = \{C_1\}$$

$$(2) [A] \{x\} = \{C_2\}$$

$$(3) [A] \{x\} = \{C_3\}$$

→ يستعمل نفس المتغيرات بس

متغير C مختلفة بالتالي القيم مختلفة

لو بيدي أوجدتهم الوضع الطبيعي راح

أهل بالتفصيل لكل system

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

Inverse of matrix not change

يعني بس أعراف الـ $[A]^{-1}$

يستعمل الـ

Inverse

في حال

مباشرة لحل 6 بعين بس لي
بتغير C والحل يكون أسرع

Fixed matrix & variable constant

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

بشيلهم ويوجد

Identity matrix
matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

(3x3) {C1} {C2} {C3} (3x3) (3 * 6)

على أي شيء يعمل
على هذي الـ matrix
بصعوا على الثانية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

 $[A]^{-1}$

في وجود
الحل

$$[X] = [A]^{-1} [C]$$

ask ; believe & recieve

to check if inverse is inverse :-

$$1 - [A]^{-1} = [A]$$

$$2 - [A][A]^{-1} = [I]$$

$$\hookrightarrow [A][B] \neq [B][A]$$

Example :-

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $[A]$ $[I]$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.666 & 0.333 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 7.333 & 4.666 & 0.666 & 1 & 0 \\ 0 & -2.666 & 5.333 & 0.333 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.090909 & 0.272727 & 0.0909 & 0 \\ 0 & 1 & -0.6363 & -0.09091 & 0.3636 & 0 \\ 0 & 0 & 3.63636 & 0.090909 & 0.3636 & 1 \end{array} \right]$$

ask :: believe & recieve

N O T E B O O K

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.275 & 0.1 & 0.025 \\ 0 & 1 & 0 & -0.075 & 0.2 & 0.175 \\ 0 & 0 & 1 & 0.025 & 0.1 & 0.275 \end{array} \right]$$

$\downarrow$ $[I]$
 $\downarrow$ $[A]^{-1}$

$$\{X\} = [A]^{-1}\{C\}$$

$$= \{C\} [A]^{-1}$$

3×1 3×3

← مش زي بعض، ما عندي
جواب في هاي الحالة

$$\left[\begin{array}{ccc} 0.275 & 0.1 & 0.025 \\ -0.075 & 0.2 & 0.175 \\ 0.025 & 0.1 & 0.275 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} -10 \\ 44 \\ -26 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = (0.275)(-10) + (0.1)(44) + (0.025)(-26) = 1$$

$$x_2 = (-0.075)(-10) + (0.2)(44) + (0.175)(-26) = 5$$

$$x_3 = (0.025)(-10) + (0.1)(44) + (0.275)(-26) = -3$$

LU Factorization :-

step 1 :-

decomposition of matrix (بدنا بنزى المصفوفة)

$$[A] \{x\} = \{c\}$$

 $\rightarrow$ decomposition $[U] [L]$
 $\rightarrow$ upper matrix $\rightarrow$ lower matrix

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{by gauss equation}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fixed for all } [L]$$

ال element لي بي أخذته
على ال mean element بيون إشارة

 $\rightarrow$ From original matrix $\rightarrow L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$
 $L_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \rightarrow$ للعمود الأول
بس

submatrix ①

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \rightarrow L_{32} = a'_{32} / a'_{22}$$

 $\rightarrow$ بوجده وبعسسه على ال
main element

ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

To check if $[U]$ & $[L]$ are correct :-

$$[L][U] = [A] \quad \checkmark$$

$$[U][L] \neq [A] \quad \times$$

Step 2 :-

using Forward substitution Find the vector $\{D\}$

$$[L]\{D\} = \{C\}$$

↳ constant in original equation.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad D_1 + 0(D_2) + 0(D_3) = C_1 \rightarrow \boxed{D_1} = C_1$$

$$\textcircled{2} \quad L_{21} D_1 + D_2 = C_2 \rightarrow \boxed{D_2} = C_2 - L_{21} D_1$$

$$\textcircled{1} \quad L_{31} D_1 + L_{32} D_2 + D_3 = C_3 \rightarrow \boxed{D_3} = C_3 - L_{31} D_1 - L_{32} D_2$$

Step 3 :-

using Backward substitution to find the solution of the system $\{X's\}$

$$[U]\{X\} = \{D\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

$$③ \quad a_{33}'' X_3 = D_3 \rightarrow \boxed{X_3} = D_3 / a_{33}''$$

$$② \quad a_{22}' X_2 + a_{23} X_3 = D_2 \rightarrow \boxed{X_2} = \frac{D_2 - a_{23} X_3}{a_{22}'}$$

$$① \quad a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = D_1 \rightarrow \boxed{X_1} = \frac{D_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3}{a_{11}}$$

to find $\text{Det}[A] = a_{11} \times a_{22}' \times a_{33}'' \rightsquigarrow [U]$ من

بغروب عناصر ال main diagonal ببعض ال بي اطلع ال Inverse

Example :-

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 44 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$[A] \rightarrow [L] \rightarrow [U]$

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.666 \\ 0 & 0 & 3.636363 \end{bmatrix} \rightarrow \text{نفس الطريقة} \\ \text{gauss elimination}$$

مثل ما تكون صفر

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}'} = \frac{-2.666}{7.333} = -0.36363$$

sub matrix مثل ما افلي

$$L_{21} = 2/3$$

$$L_{31} = -1/3$$

$$\text{Det}[A] = 3 \times 7.333 \times 3.6363 = 80$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix}$$

to check $[L][U] :-$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.666 \\ 0 & 0 & 3.6363 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow [A] \quad \checkmark$

Find the substitution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 44 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = -10$$

$$0.666 D_1 + D_2 = 44 \rightarrow D_2 = 50.666$$

$$-0.333(-10) - (0.3636)(50.666) + D_3 = -26 \rightarrow D_3 = -10.9090$$

ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

Back word substitution to find $\{x\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.666 \\ 0 & 0 & 3.63636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 50.666 \\ -10.9090 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 3$$

L U Factorization :-

$$[A] \{x\} = \{C\}$$

↓

$[L]$ & $[U]$

↓

↳ gauss elimination

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

3 - Find the inverse of $[A]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\rightarrow [A] \rightarrow [U] \& [L]$$

↓
بدنا نقول
حسبناهم

adar

ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

→ to find the first column in inverted matrix :-

$$[L] \{D\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

لأول عمود في الـ

identity matrix

بمسجل هاي

التيتم عشان أوجد X

$$[U] \begin{Bmatrix} a_{11}^{-1} \\ a_{21}^{-1} \\ a_{31}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{11}^{-1} \\ a_{21}^{-1} \\ a_{31}^{-1} \end{Bmatrix}$$

→ to find the second column of the inverted matrix :-

$$[L] \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ D_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

لأول عمود الثاني في الـ

identity matrix

$$[U] \begin{Bmatrix} a_{12}^{-1} \\ a_{22}^{-1} \\ a_{32}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ D_3^{(2)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{12}^{-1} \\ a_{22}^{-1} \\ a_{32}^{-1} \end{Bmatrix}$$

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

→ For the third column of the inverted matrix :-

$$[L] \begin{Bmatrix} D_1^3 \\ D_2^3 \\ D_3^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \\ D_3^{(3)} \end{Bmatrix}$$

للعنود الثاني ال

identity matrix

$$[U] \begin{Bmatrix} a_{13}^{-1} \\ a_{23}^{-1} \\ a_{33}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \\ D_3^{(3)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{13}^{-1} \\ a_{23}^{-1} \\ a_{33}^{-1} \end{Bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

→ To Find a solution for the system :-

$$[A]^{-1} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

← يستغل على حسب ال size

لـ matrix

← (3x3) يستغل 3 مرات وهكذا

adar
ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

Example :-

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & +1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 44 \\ -26 \end{bmatrix}$$

(3x3)
↓
بدي أوجد الحل
3 مرات

↓
[A] {X} {C}

[U] [L]

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.666 \\ 0 & 0 & 3.63636 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓
forward substitution
بفعل 3 معادلات
وبفعل وينوجد قيم
D

$$\Rightarrow D_1^{(1)} = 1$$

$$D_2^{(1)} = -0.666$$

$$D_3^{(1)} = 0.090909$$

adar
ask :: believe & recieve

NOTEBOOK

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & 4.66\bar{6} \\ 0 & 0 & 3.63636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} \\ a_{21}^{-1} \\ a_{31}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.66\bar{6} \\ 0.090909 \end{bmatrix}$$

Backward

substitution

$$\hookrightarrow a_{11}^{-1} = 0.275$$

$$a_{21}^{-1} = -0.075$$

$$a_{31}^{-1} = 0.025$$

2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66\bar{6} & 1 & 0 \\ -0.33\bar{3} & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ D_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow D_1^{(2)} = 0$$

$$D_2^{(2)} = 1$$

$$D_3^{(2)} = 0.3636\bar{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.66\bar{6} \\ 0 & 0 & 3.6363 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12}^{-1} \\ a_{22}^{-1} \\ a_{32}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.3636\bar{3} \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow a_{12}^{-1} = 0.1$$

$$a_{22}^{-1} = 0.2$$

$$a_{32}^{-1} = 0.1$$

ask ; believe & recieve

3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.666 & 1 & 0 \\ -0.333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \\ D_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1^{(3)} = 0$$

$$D_2^{(3)} = 0$$

$$D_3^{(3)} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7.333 & -4.666 \\ 0 & 0 & 3.6363 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13}^{-1} \\ a_{23}^{-1} \\ a_{33}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{13}^{-1} = 0.025$$

$$a_{23}^{-1} = 0.175$$

$$a_{33}^{-1} = 0.275$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.275 & 0.1 & 0.025 \\ -0.075 & 0.2 & 0.175 \\ 0.025 & 0.1 & 0.275 \end{bmatrix}$$

$$[A][A]^{-1} = [I]$$

$$[A]^{-1}[A] = [I]$$

عشان تحقق لازم

لا أخترب يعطينا ال

identity matrix

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

$$\begin{bmatrix} 0.275 & 0.1 & 0.025 \\ -0.075 & 0.2 & 0.175 \\ 0.025 & 0.1 & 0.275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 44 \\ -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

كل هذه الطرق
لي أمثلة لهم
direct method

ويوجد قسم X

Iterative methods :-

(Jacobi & Gauss sieedel)

$$a_{11} \boxed{x_1} + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = C_1$$

لازم كل معادلة أستعملها

$$a_{21} x_1 + a_{22} \boxed{x_2} + a_{23} x_3 = C_2$$

عشان أوجد متغير واحد

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} \boxed{x_3} = C_3$$

مفروض أستعمل المعادلة أكثر

من مرة

$$x_1 = \frac{C_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}}$$

إلا ما عدي يتم x_2, x_3

بالبداية بخو من الهم صغر

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21} x_1 - a_{23} x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2}{a_{33}}$$

* لازم أرفع أعيد الترتيب

لما ال main لكل Row يكون

أكبر من مجموع العنصرين لي ضلوا

بنفس ال Row ، إذا عرفت ارتبنا بكون أنا وحقني X

ل هذا
الترتيب ممكن
يكون حق وممكن
X4

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

$$\begin{bmatrix} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{21}| > |a_{22}| + |a_{23}| \\ |a_{31}| + |a_{32}| < |a_{33}| \end{bmatrix}$$

↓

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

بدي القيمة المطلقة لـ a_{11}

تكون أكبر من مجموع القيمة

المطلقة لـ $a_{12} + a_{13}$ وهكذا

لكل Row

لفرض هاد الترتيب صالح

صحيح وأكبرت للعلاقات

يحتاج استيعاب لـ x_1 x_3, x_2

Jacobi method :-

$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$$

→ Initial guess

ما كانوا

لكل variable يعني عندي

عندي أفضل منهم مغز

3 initial بيدي

وهكذا....

وأكمل

In first iteration :-

$$x_1^{(1)} = \frac{c_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0}{a_{11}}$$

 a_{11}

بستعمل

القيمة القديمة

initial guess

$$x_2^{(1)} = \frac{c_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0}{a_{22}}$$

 a_{22}

$$x_3^{(1)} = \frac{c_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0}{a_{33}}$$

 a_{33}

adar

ask ; believe & recieve

NOTEBOOK

$$RE(X_1) = \left| \frac{X_1^{(1)} - X_1^0}{X_1^{(1)}} \right|$$

* إذا كان 3 كانت

$$RE < T_{01}$$

معناها هتوصل لحل

$$RE(X_2) = \left| \frac{X_2^{(1)} - X_2^0}{X_2^{(1)}} \right|$$

إذا لا يعمل كان

iteration

$$RE(X_3) = \left| \frac{X_3^{(1)} - X_3^0}{X_3^{(1)}} \right|$$

=> For the 2nd iteration :-

$$\{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}\}$$

$$X_1^{(2)} = \frac{c_1 - a_{12}X_2^{(1)} - a_{13}X_3^{(1)}}{a_{11}}$$

$$X_2^{(2)} = \frac{c_2 - a_{21}X_1^{(1)} - a_{23}X_3^{(1)}}{a_{22}}$$

$$X_3^{(2)} = \frac{c_3 - a_{31}X_1^{(1)} - a_{32}X_2^{(1)}}{a_{33}}$$

وبنقل نكمل
Iteration
لغاية ما
RE < Tol
إذا 3 فتر

adar
ask ; believe & recieve

N O T B O O K

* Gauss seidel :-

$\{X_2^0, X_3^0, \dots\}$

initial guess

له حسب عدد ال

بسم ما يحتاج لأجل X

variables

→ 1st iteration :-

$$X_1^{(1)} = \frac{c_1 - a_{12}X_2^0 - a_{13}X_3^0}{a_{11}} \quad (\text{old})$$

$$X_2^{(1)} = \frac{c_2 - a_{21}X_1^{(1)} - a_{23}X_3^0}{a_{22}} \quad (\text{mixture})$$

$$X_3^{(1)} = \frac{c_3 - a_{31}X_1^{(1)} - a_{32}X_2^{(1)}}{a_{33}} \quad (\text{new})$$

→ 2nd iteration :-

$\{X_2^{(1)}, X_3^{(1)}\}$

$$X_1^{(2)} = \frac{c_1 - a_{12}X_2^{(1)} - a_{13}X_3^{(1)}}{a_{11}}$$

$$X_2^{(2)} = \frac{c_2 - a_{21}X_1^{(2)} - a_{23}X_3^{(1)}}{a_{22}}$$

$$X_3^{(2)} = \frac{c_3 - a_{31}X_1^{(2)} - a_{32}X_2^{(2)}}{a_{33}}$$

Example :-

$$0.1 \boxed{x_1} + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.1 < 7.3$$

ما تحقق

$$3x_1 - 0.1 \boxed{x_2} - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1 < 3.2$$

الشروط

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10 \boxed{x_3} = 71.4$$

$$10 > 0.5 \rightarrow$$

تحقق

بني أعيد الترتيب

→ Jacobi :-

$$3 \boxed{x_1} - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$3 > 0.3$$

تحقق

$$0.1x_1 + 7 \boxed{x_2} - 0.3x_3 = -19.3$$

$$7 > 0.4$$

الشروط

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10 \boxed{x_3} = 71.4$$

$$10 > 0.5$$

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$$

1st iteration :-

$$x_1^{(1)} = \frac{7.85 + (0.1)(0) + 0.2(0)}{3} = 2.61666$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-19.3 - 0.1(0) + 0.3(0)}{7} = -2.7575143$$

$$x_3^{(1)} = \frac{71.4 - 0.3(0) + 0.2(0)}{10} = 7.14$$

RE % :-

$$\textcircled{1} RE(x_1^{(1)}) = \left| \frac{2.61666 - 0}{2.61666} \right| \times 100\% = 100\% \text{ error}$$

do another
iteration

ask ; believe & receive

2nd iteration :-

$$x_1^{(1)} = 2.61666$$

$$x_2^{(1)} = -2.7575143$$

$$x_3^{(1)} = 7.14$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7.85 + (0.1)(-2.7575143) + (0.2)(7.14)}{3}$$

$$= 3.0007619$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-19.3 - (0.1)(2.61666) + 0.3(7.14)}{7}$$

$$= -2.488524$$

$$x_3^{(2)} = \frac{71.4 - (0.3)(2.61666) + 0.2(-2.7575143)}{10}$$

$$= 7.006357$$

3rd iteration :-

$$x_1^{(3)} = 3.0008063$$

$$x_2^{(3)} = -2.499738$$

$$x_3^{(3)} = 7.0002067$$

4th iteration :-

$$x_1^{(4)} = 3.000225$$

$$x_2^{(4)} = -2.5000027$$

$$x_3^{(4)} = 6.999981$$

ask :: believe & recieve

N O T E B O O K

→ Gauss siedal :-

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$$

1st iteration :

$$x_1^{(1)} = \frac{7.85 + 0.1(0) + (0.2)(0)}{3} = 2.61666$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-19.4 - (0.1)(2.61666) + (0.3)(0)}{7} = -2.7945238$$

$$x_3^{(1)} = \frac{71.4 - 0.3(2.61666) + (0.2)(-2.7945238)}{10} = 7.0050095$$

2nd iteration :-

$$x_1^{(2)} = \frac{7.85 + (0.1)(-2.7945238) + (0.2)(7.0050095)}{3} = 2.99055651$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-19.4 - (0.1)(2.99055651) + (0.3)(7.0050095)}{7} = -2.499624686$$

$$x_3^{(2)} = \frac{71.4 - (0.3)(2.99055651) + (0.2)(-2.499624686)}{10} = 7.0002908$$

→ Gauss siedal :-

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$$

1st iteration :

$$x_1^{(1)} = \frac{7.85 + 0.1(0) + (0.2)(0)}{3} = 2.61666$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-19.4 - (0.1)(2.61666) + (0.3)(0)}{7} = -2.7945238$$

$$x_3^{(1)} = \frac{71.4 - 0.3(2.61666) + (0.2)(-2.7945238)}{10} = 7.0050095$$

2nd iteration :-

$$x_1^{(2)} = \frac{7.85 + (0.1)(-2.7945238) + (0.2)(7.0050095)}{3} = 2.99055651$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-19.4 - (0.1)(2.99055651) + (0.3)(7.0050095)}{7} = -2.499624686$$

$$x_3^{(2)} = \frac{71.4 - (0.3)(2.99055651) + (0.2)(-2.499624686)}{10} = 7.00029081$$

ask :: believe & recieve

N O T E B O O K

3rd iteration :-

$$X_1^{(3)} = 3.0000319$$

$$X_2^{(3)} = -2.499988$$

$$X_3^{(3)} = 7.000000$$

ممنوع يكون عندي أختيار بال
main diagonal على صف.

والا طلع عنا صف شو بنصل ؟!

بنعمل بتديل Row ب Row ، بتبديل ال Row لي طلع فيها صف مع Row كتها .

Direct method :-

$$2x + 6y + 10z = 0$$

$$x + 3y + 3z = 2$$

$$3x + 14y + 28z = -8$$

↓

2	6	10	0	→ Row 1 :-	$\times (-1)$
1	3	3	2	$\left(\begin{array}{cccc} 2/2 & 6/2 & 10/2 & 0/2 \end{array} \right)$	$\nearrow$ $\searrow$ $\times (-3)$
3	14	28	-8		

↓ elimination

2	6	10	0	→ طلع عنا 0
0	0	-2	2	بال main بالتالي
0	5	13	-8	بدي اعمل swap

بين هاي ال Row وال Row لي كتها .

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & -8 \\ 6 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

→ بدلنا بين Row 2 و

Row 3 وما على مشاكل

وہسا بنکے ملے ><

$$Z = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y = \frac{-8 - (13)(-1)}{5} = 1$$

$$x = \frac{0 - 10(-1) - (6)(1)}{2} = 2$$



System of nonlinear equations :-

- 1 - Newton's method (mix between iterative & Direct)
- 2 - Fixed point iteration (iterative)

→ Jacobian matrix :-

$$f_1(x, y, z) = \text{non-linear}$$

$$f_2(x, y, z) = \text{non-linear}$$

$$f_3(x, y, z) = \text{non-linear}$$

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow Q_1 \\ \rightarrow Q_2 \\ \rightarrow Q_3 \end{matrix}$$

لـ مسـ خـ وـ رـ عـ
كلها أرقام ممكن
أرقام ممكن
متغيرات

3x3

لـ راجـ يطلعـ عنا squar matrix
هنا عدد الـ Row والـ column
يساوي عدد الجاهيل

$x_0, y_0, z_0 \rightarrow$ initial guess

Jacobian matrix

$$J(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\partial f_3}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \bigg|_{x_0, y_0, z_0} \end{bmatrix}$$

Step 2 :-

Solve the following system to obtain the corrections to the initial guesses $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$J(x_0, y_0, z_0)_{3 \times 3} * \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = - \begin{Bmatrix} f_1(x_0, y_0, z_0) \\ f_2(x_0, y_0, z_0) \\ f_3(x_0, y_0, z_0) \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

solve it by gauss elimination
 $\Delta x^{(1)}, \Delta y^{(1)}, \Delta z^{(1)}$

Step 3 :-

Find the new values for the variables.

$$x^{(1)} = x_0 + \Delta x^{(1)}$$

$$y^{(1)} = y_0 + \Delta y^{(1)}$$

$$z^{(1)} = z_0 + \Delta z^{(1)}$$

1

$$f_1(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \leq T_{ol}$$

$$f_2(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \leq T_{ol}$$

$$f_3(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \leq T_{ol}$$

← لازم الثلاثة يتحققوا عشان يكونوا حلول. اذا واحد

ما تحقق بجعل new iteration

2

$$RE(X) = \left| \frac{x^{(1)} - x_0}{x^{(1)}} \right| * 100\% \leq Tol$$

$$RE(Y) = \left| \frac{y^{(1)} - y_0}{y^{(1)}} \right| * 100\% \leq Tol$$

$$RE(Z) = \left| \frac{z^{(1)} - z_0}{z^{(1)}} \right| * 100\% \leq Tol$$

in the second iteration :-

$$J(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) * \begin{Bmatrix} \Delta x^{(2)} \\ \Delta y^{(2)} \\ \Delta z^{(2)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_1(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \\ f_2(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \\ f_3(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \end{Bmatrix}$$

Example :-

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 - 2x - y + 0.5 \\ f_2(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 - 2x - y + 0.5 \\ f_2(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4 \end{aligned}} \right\} \text{non-linear}$$

$$x_0 = 2 \quad y_0 = 0.25$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2 & -1 \\ 2x & 8y \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$J(2, 0.25) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_1(2, 0.25) = (2)^2 - (2)(2) - 0.25 + 0.5 = 0.25$$

$$P_2(2, 0.25) = (2)^2 - 4(0.25)^2 - 4 = -0.25$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta^{\textcircled{1}}x \\ \Delta^{\textcircled{1}}y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

بمعدل
elimination

لإزالة صف
gauss elimination

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta^{\textcircled{1}}x \\ \Delta^{\textcircled{1}}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.125 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{\textcircled{1}}y = \frac{0.25}{4} = 0.0625 \rightarrow y^{\textcircled{1}} = 0.25 + 0.0625 = 0.3125$$

$$\Delta^{\textcircled{1}}x = -0.09375 \rightarrow x^{\textcircled{1}} = 2 - 0.09375 = 1.90625$$

new
values

$$f_1(x^{(1)}, y^{(1)}) = (1.90625)^2 - (2)(1.90625) - 0.3125 + 0.5$$

$$= |0.008789| > 10^{-5}$$

another
iteration

$$f_2(x^{(1)}, y^{(1)}) = |0.024414| > 10^{-5}$$

$$\begin{bmatrix} 1.8125 & -1 \\ 3.8125 & 2.5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta x^{(2)} \\ \Delta y^{(2)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0.008789 \\ 0.024414 \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$J(x^{(1)}, y^{(1)})$$

$$\Delta x^{(2)} = -0.00555 \quad x^{(2)} = 1.900691$$

$$\Delta y^{(2)} = -0.001287557 \quad y^{(2)} = 0.311212$$

$$f_1(x^{(2)}, y^{(2)}) = |0.00003277| > 10^{-5}$$

another
iteration

$$f_2(x^{(2)}, y^{(2)}) = |0.00037913| > 10^{-5}$$

$$y^{(3)} = 0.311218565 \rightarrow f_1(x^{(3)}, y^{(3)}) = 4.93 \times 10^{-7}$$

$$x^{(3)} = 1.900677 \rightarrow f_2(x^{(3)}, y^{(3)}) = 1.039 \times 10^{-6}$$

2 - Fixed point :-

$$f_1(\boxed{x}, y, z) = 0 \rightarrow \text{يعني بي}$$

$$f_2(x, \boxed{y}, z) = 0 \quad \text{X على طرف}$$

$$f_3(x, y, \boxed{z}) = 0 \quad \text{وباقى الاقتران على طرف ثانى}$$

من كل معادلة بحسب قيمة

بغير ارجع X من المعادلة

الثانية أو الثالثة ، بدنا

نجرب

N O T E B O O K

ask ; believe & recieve

$$x = g_1(x, y, z)$$

$$y = g_2(x, y, z)$$

$$z = g_3(x, y, z)$$

↓

initial guesses

$$[x^0, y^0, z^0]$$

1st iteration :-

$$x^{(1)} = g_1(x^0, y^0, z^0)$$

$$y^{(1)} = g_2(x^0, y^0, z^0)$$

$$z^{(1)} = g_3(x^0, y^0, z^0)$$

Jacobi

or

$$x^{(1)} = g_1(x^0, y^0, z^0)$$

$$y^{(1)} = g_2(x^{(1)}, y^0, z^0)$$

$$z^{(1)} = g_3(x^{(1)}, y^{(1)}, z^0)$$

Siedel

← الأفضل نطبق هاي

لأنها أسرع من Jacobi

Do a check $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_1}{\partial z} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} < 1$$

بنكمل بنعمل check لكل

g لازم كلهم (< 1)

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_2}{\partial z} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_3}{\partial y} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} + \left| \frac{\partial g_3}{\partial z} \right|_{x_1^1, y_1^1, z_1^1} < 1$$

إذا لم يحقق الشرط بفعل على هذه الـ g بدون ما غير أي وحدة ، أما إذا وحدة ما حقت الشرط بغير الـ g ، هـ الـ check بس بفعلوا بأول iteration أما بعدين خلص بفعل عادي.

2nd iteration:-

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= g_1(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \rightarrow RE < Tol && \text{لازم الـ 3} \\ y^{(2)} &= g_2(x^{(2)}, y^{(1)}, z^{(1)}) \rightarrow RE < Tol && \text{يكونوا أحلى من الـ} \\ z^{(2)} &= g_3(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(1)}) \rightarrow RE < Tol && Tol ، إلا وحدة} \end{aligned}$$

ما حقت بفعل كان iteration

Example :-

$$x^2 + xy - 10 = 0$$

$$y + 3x y^2 - 57 = 0$$

$$x_0 = 1.5 \quad y_0 = 3.5$$

$$x = \sqrt{10 - xy} \rightarrow g_1(x, y)$$

$$y = \sqrt{\frac{57 - y}{3x}} \rightarrow g_2(x, y)$$

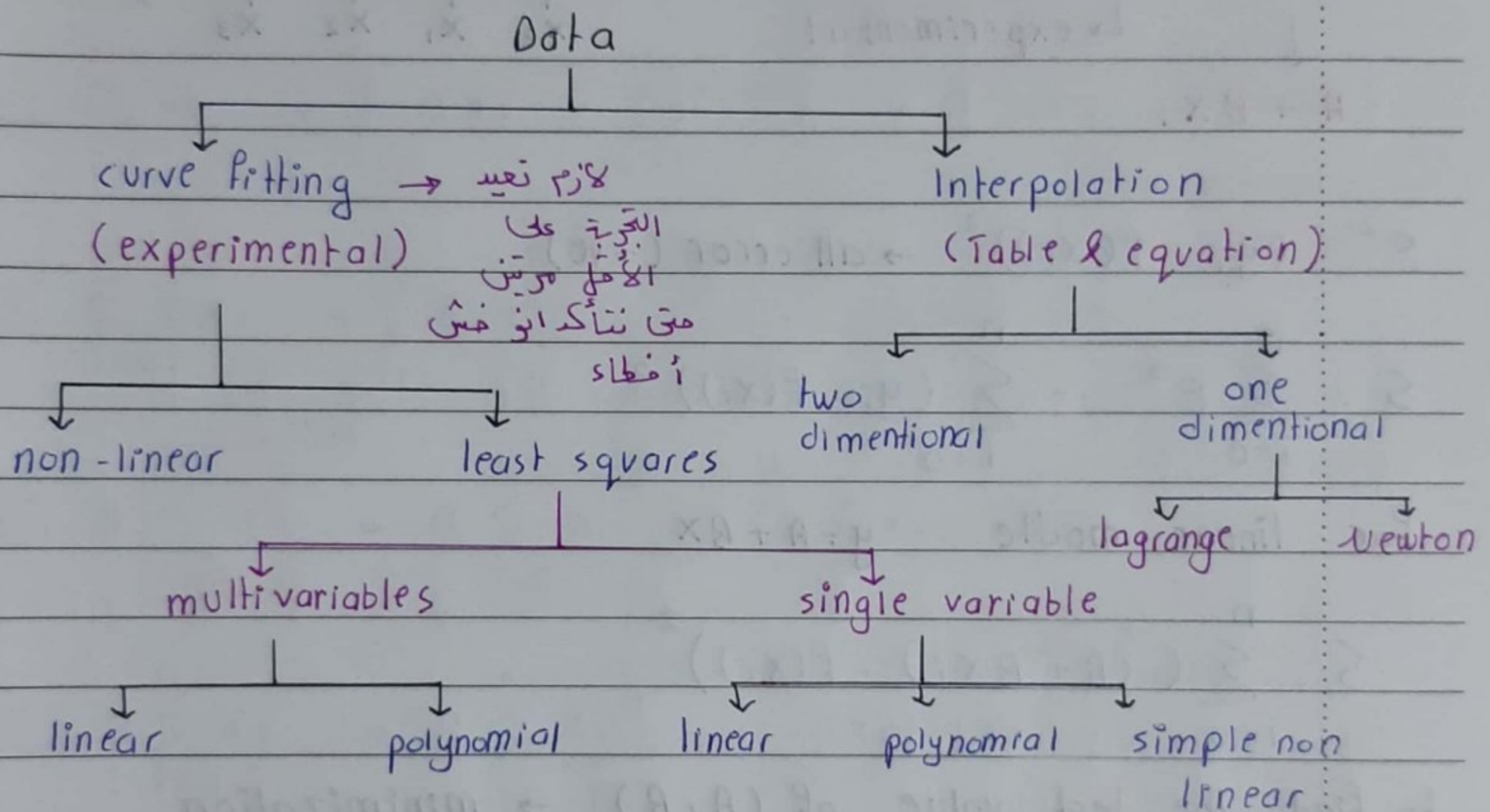
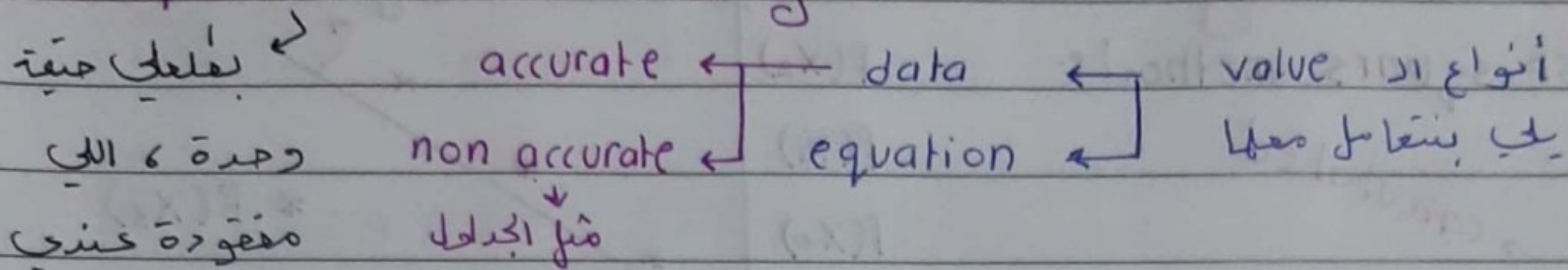
1st iteration :-

$$x^{(1)} = g_1(x_0, y_0) = \sqrt{10 - (1.5)(3.5)} = 2.17945$$

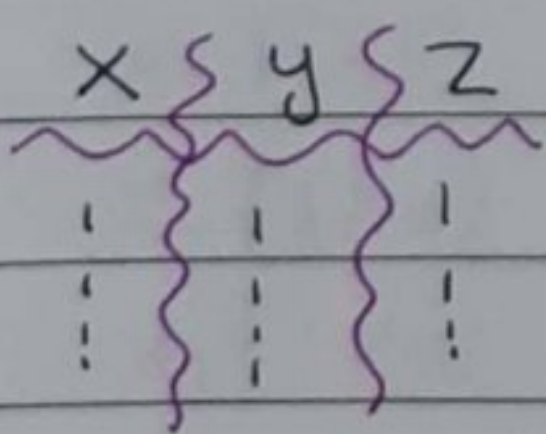
$$y^{(1)} = g_2(x^{(1)}, y_0) = \sqrt{\frac{57 - (3.5)}{3(2.17945)}} = 2.86051$$

بفعل check
وبفعل

Interpolation & curve Fitting :-



curve Fitting

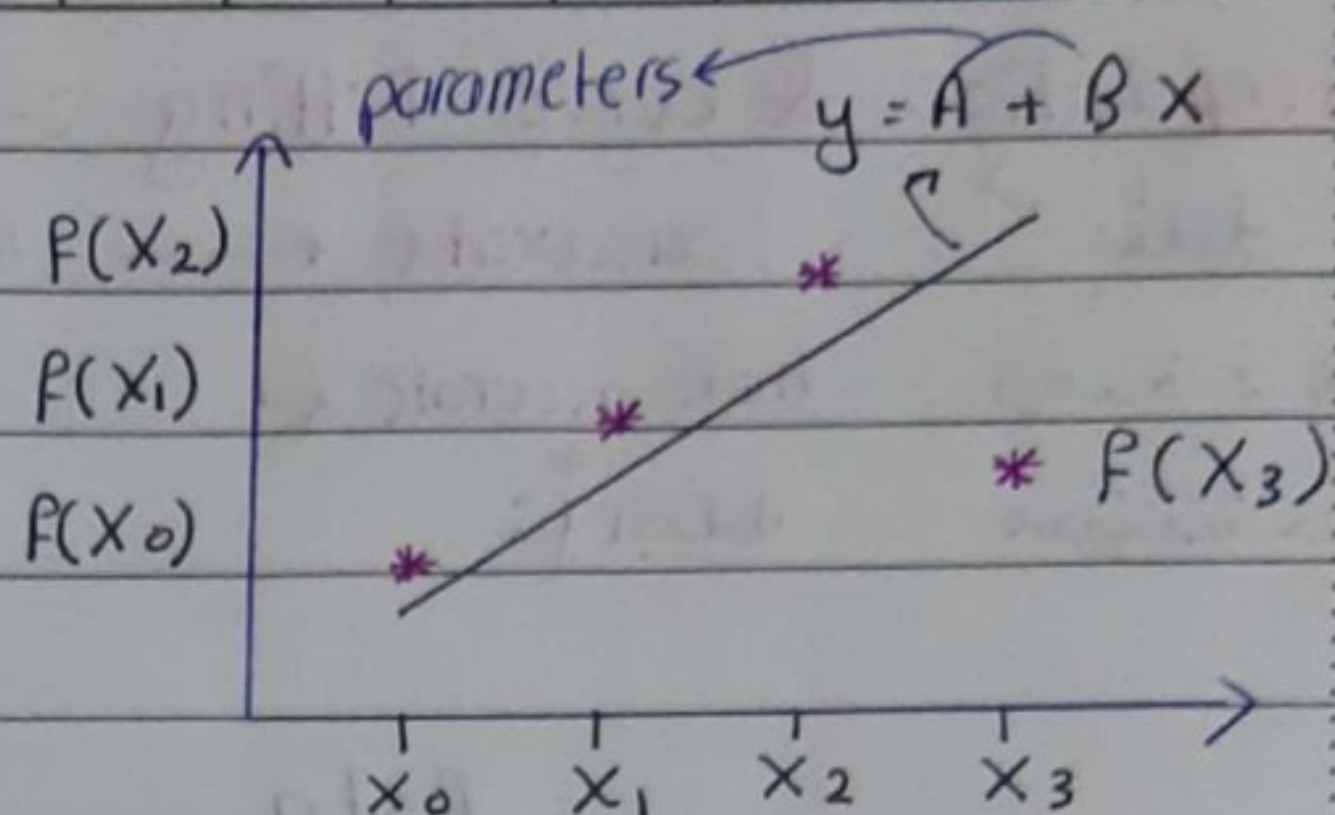


Curve Fitting :-

1 - least squares method :-

$$\epsilon = \underset{\substack{\uparrow \text{calculated} \\ \downarrow \text{experimental}}}{y_i - f(x_i)}$$

$$A + Bx_i$$



$$\epsilon^2 = (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{all error (+ve)}$$

$$S = \sum_{i=0}^n \epsilon^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2$$

For linear model $y = A + Bx$

$$S = \sum_{i=0}^n ((A + Bx_i) - f(x_i))^2$$

to find the best value of $(A, B) \rightarrow$ minimization of the $\sum$ of errors (ϵ^2)

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{2}{2} \sum_{i=0}^n (A + Bx_i - f(x_i)) () = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = \frac{2}{2} \sum_{i=0}^n (A + Bx_i - f(x_i)) (x_i) = 0$$

$$[1] \sum_{i=0}^n (A + B X_i - F(X_i)) = 0$$

$$[2] \sum_{i=0}^n (A X_i + B X_i^2 - F(X_i) \times (X_i)) = 0$$

بعد ما نقل الـ

$$[1] \sum_{i=0}^n A + \sum_{i=0}^n B X_i - \sum_{i=0}^n F(X_i) = 0 \quad (A \& B) \downarrow \text{constant}$$

الأصل

$$[2] \sum_{i=0}^n A X_i + \sum_{i=0}^n B X_i^2 - \sum_{i=0}^n (X_i) F(X_i) = 0$$

$$[1] A \sum_{i=0}^n 1 + B \sum_{i=0}^n X_i - \sum_{i=0}^n F(X_i) = 0$$

$$[2] A \sum_{i=0}^n X_i + B \sum_{i=0}^n X_i^2 - \sum_{i=0}^n (X_i) F(X_i) = 0$$

برمضو بزبد كان column
بعمل column جديد عشان أطلعها

$X_i F(X_i)$	X_i^2	X_i	$F(X_i)$
$X_0 F(X_0)$	X_0^2	X_0	$F(X_0)$
$X_1 F(X_1)$	X_1^2	X_1	$F(X_1)$
$X_2 F(X_2)$	X_2^2	X_2	$F(X_2)$
$\sum X_i F(X_i)$	$\sum X_i^2$	$\sum X_i$	$\sum F(X_i)$

حسب متيهم
من الجدول

$$nA + B \sum x_i = \sum f(x_i)$$

$$A \sum x_i + B \sum x_i^2 = \sum x_i f(x_i)$$

→ system of linear equation

بالمعادلة
parameter
كلية هون

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum f(x_i)(x_i) \end{Bmatrix}$$

use gauss elimination to find A & B

(A & B) → are the best values that represents the linear model.

Curve Fitting :-

$$\text{error} = (y(x_i) - f(x_i))^2$$

↑
experimental value
↓
calculated value

$$S = \sum_{i=0}^n (y(x_i) - f(x_i))^2$$

as close as possible to zero → كلما كانت S أصغر
يعني أقرب لتكون

معدل ال Fitting يكون
أفضل

$$\frac{\partial S}{\partial \text{parameters}} = 0$$

مسبب عدد ال
parameters بتغير
الدرجة.

1 $y(x_i) \rightarrow \text{linear Model} = A + B x_i$
 $\underbrace{\quad}_{\text{parameters}}$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i \cdot f(x_i) \end{Bmatrix}$$

↓ بتخل بـ خطه

Gauss elimination

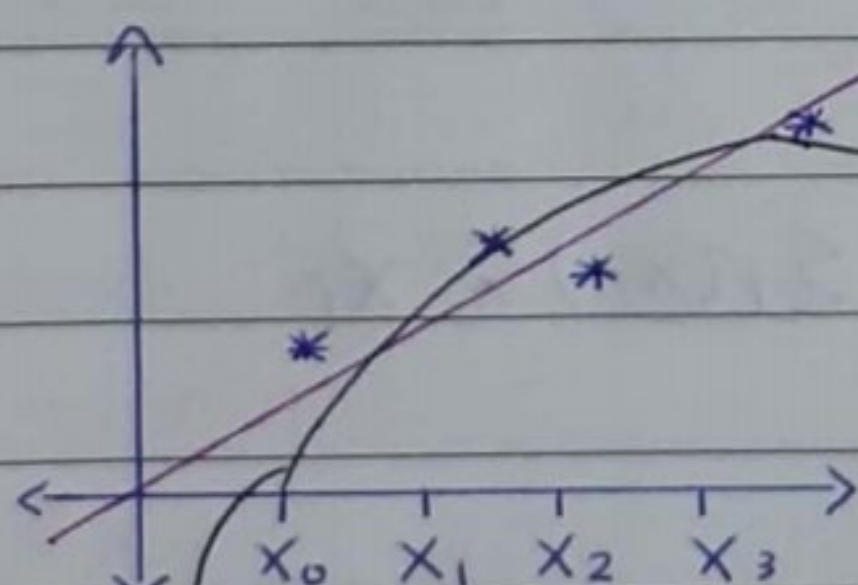
ويوجد B & A

2

$$\varepsilon = (y(x_i) - f(x_i))^2$$

$$\varepsilon = ((A + Bx_i + Cx_i^2) - f(x_i))^2$$

$$S = \sum_{i=0}^n (\varepsilon) = \sum_{i=0}^n ((A + Bx_i + Cx_i^2) - f(x_i))^2$$



linear model

ما بعد بكل النقاط
بدنا نغير ال model

نرفع ال model
one by one

$$y(x_i) = \underbrace{A} + \underbrace{B} x_i + \underbrace{C} x_i^2$$

(A, B, C) → parameters

↓
بدنا نعلم

لي بتقل ال error

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 = \frac{2}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (A + Bx_i + Cx_i^2 - f(x_i)) \{1\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 0 = \frac{2}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (A + Bx_i + Cx_i^2 - f(x_i)) \{x_i\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = 0 = \frac{2}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (A + Bx_i + Cx_i^2 - f(x_i)) \{x_i^2\}$$

↓ إعادة ترتيب

$$\frac{\partial S}{\partial A} \Rightarrow$$

$$0 = \sum A + \sum Bx_i + \sum Cx_i^2 - \sum f(x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} \Rightarrow$$

$$0 = \sum Ax_i + \sum Bx_i^2 + \sum Cx_i^3 - \sum f(x_i) \times x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} \Rightarrow$$

$$0 = \sum Ax_i^2 + \sum Bx_i^3 + \sum Cx_i^4 - \sum f(x_i) \times x_i^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} \Rightarrow$$

$$0 = A \sum_{i=1}^n (1) + B \sum X_i + C \sum X_i^2 - \sum P(X_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} \Rightarrow$$

$$0 = A \sum X_i + B \sum X_i^2 + C \sum X_i^3 - \sum P(X_i) * X_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} \Rightarrow$$

$$0 = A \sum X_i^2 + B \sum X_i^3 + C \sum X_i^4 - \sum X_i^2 * P(X_i)$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_i & \sum X_i^2 \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum P(X_i) \\ \sum X_i * P(X_i) \\ \sum X_i^2 * P(X_i) \end{Bmatrix}$$

↓
3x3

بفعل باستخدام

gauss elimination

وینوجد A & B & C

$$3^{rd} \quad P(X_i) = A + BX_i + CX_i^2 + DX_i^3$$

↓
matrix

(4x4)

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \sum X_i^5 \\ \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \sum X_i^5 & \sum X_i^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum F(X_i) \\ \sum F(X_i) X_i \\ \sum F(X_i) X_i^2 \\ \sum X_i^3 F(X_i) \end{Bmatrix}$$

← جنبه
 Row 1
 د فليعتا عنا
 هاي ال
 Row
 و الباقي
 نفس الستي
 هون جنبه
 Row 1

[2] Simple non-linear models :-

لأي non-linear

أحولو linear

$$y = ab^x \rightarrow \ln y = \underbrace{\ln a}_{\text{intercept}} + x \underbrace{\ln b}_{\text{slop}}$$

$$\ln y = \ln a + \ln b \cdot x$$

X	Y	ln y
X ₀	F(X ₀)	o
X ₁	F(X ₁)	o
X ₂	F(X ₂)	o

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum Y \\ \sum X_i Y \end{Bmatrix}$$

ln a
 ln b

$$y = a x^b \rightarrow \ln y = \ln a + b \ln x$$

$$Y = A + bX$$

X	x	y	Y
✓			✓

لما يستعملهم الهدف أتا بدى

أفلية الكعادات رقيس linear (لازم أكون أرم مين مع مين)

$$y = \frac{1}{a + bx} \rightarrow \frac{1}{y} = a + bx$$

$$Y = a + bx$$

X	y	Y → (1/y)
✓	α	✓

3 Multiple linear Regression :-

يعني عندي

two independent variable

X	y	Z
X ₀	y ₀	Z ₀ → F(X ₀ , y ₀)
X ₁	y ₁	Z ₁ → F(X ₁ , y ₁)
X ₂	y ₂	Z ₂ → F(X ₂ , y ₂)

(A) linear multiple variable :-

$$Z = C_1 + C_2 X + C_3 y + C_4 \underline{Xy} + C_5 \underline{X^2} + C_6 \underline{y^2}$$

لما بصير بال linear يكون عنا

X² و Xy و y² لازم X أو y كالم

S T A R S N O T E B O O K

Subject :

Chapter 5

15 / 12 / 2021

$$\varepsilon = (c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i - z_i)^2$$

↳ experimental
value

$$S = \sum_{i=0}^n \varepsilon = \sum_{i=0}^n (c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i - z_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \end{bmatrix}$$

$$Z = c_1 + c_2 X + c_3 y + c_4 X^2 + c_5 y^2 + c_6 X y$$

↓

عني

6 parameters

↓ معنوع ال
degree تزيد عن 2

$$\begin{bmatrix} n & \sum X & \sum y & \sum X^2 & \sum y^2 & \sum X y \\ \sum X & \sum X^2 & \sum X y & \sum X^3 & \sum X y^2 & \sum X^2 y \\ \sum y & \sum X y & \sum y^2 & \sum X^2 y & \sum y^3 & \sum X y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Z \\ \sum X Z \\ \sum y Z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓
نبتة

S

T

A

R

S

N

O

T

E

B

O

O

K

Coefficient of regression (r^2) $\rightarrow \{0 - 1\}$

calculated values of y at given x كما كانت أقرب للواحد يكون

y at given x

استخدام قيم A & B الحد الأدنى

الحد الأدنى

error

x_i	y_i	$y_c = A + Bx_i$	$(y_c - y_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
x_0		$A + Bx_0$		
x_1	given values	$A + Bx_1$		
	$\sum (y_i)$		$\sum (y_c - y_i)^2$	$\sum (y_i - \bar{y})^2$
	$\bar{y} = \frac{\sum (y_i)}{n}$		S_r	S_t

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \rightarrow S_r = 0 \rightarrow r^2 = 1$$

$$S_r \gg S_t \rightarrow r^2 \approx 0$$

رقم قريب من الصفر

Non-linear Regression :-

$$y = ae^{bx}$$

initial guesses for
a & b

راج يطلع معنا
non-square matrix

← على عدد ال parameters يكون عدد ال

column (عمودين)

← على عدد النقاط يكون عدد ال Row

(4 Row)

x_z	y_z
x_0	$y(x_0)$
x_1	$y(x_1)$
x_2	$y(x_2)$
x_3	$y(x_3)$

$$Z \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} e^{bx_0} & a_0 x_0 e^{bx_0} \\ e^{bx_1} & a_0 x_1 e^{bx_1} \\ e^{bx_2} & a_0 x_2 e^{bx_2} \\ e^{bx_3} & a_0 x_3 e^{bx_3} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial y}{\partial a} \rightarrow e^{bx}$ $\frac{\partial y}{\partial b} \rightarrow a x e^{bx}$

general matrix

4 x 2
data points parameters

$[a_0 \& b_0]$

يكون بفرم ويحول
matrix يتحول
من

Function → Number only

$$[Z]^T = \begin{bmatrix} e^{bx_0} & e^{bx_1} & e^{bx_2} & e^{bx_3} \\ a_0 x_0 e^{bx_0} & a_0 x_1 e^{bx_1} & a_0 x_2 e^{bx_2} & a_0 x_3 e^{bx_3} \end{bmatrix}$$

2×4 2×4

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} y(x_0) - a_0 e^{b_0 x_0} \\ y(x_1) - a_0 e^{b_0 x_1} \\ y(x_2) - a_0 e^{b_0 x_2} \\ y(x_3) - a_0 e^{b_0 x_3} \end{Bmatrix} \quad 4 \times 1$$

given
calculated

$$\begin{matrix} [Z]^T & * & [Z] \\ 2 \times 4 & & 4 \times 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [Z]^T * [Z] \\ 2 \times 4 & 4 \times 2 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2$$

$$\begin{matrix} [Z]^T & * & \{D\} \\ 2 \times 4 & & 4 \times 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} [Z] * \{D\} \end{Bmatrix} \quad 2 \times 1$$

solve the following system :-

$$\begin{bmatrix} [Z]^T * [Z] \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad * \quad \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{Bmatrix} \quad 2 \times 1 = \begin{Bmatrix} [Z]^T * \{D\} \end{Bmatrix} \quad 2 \times 1$$

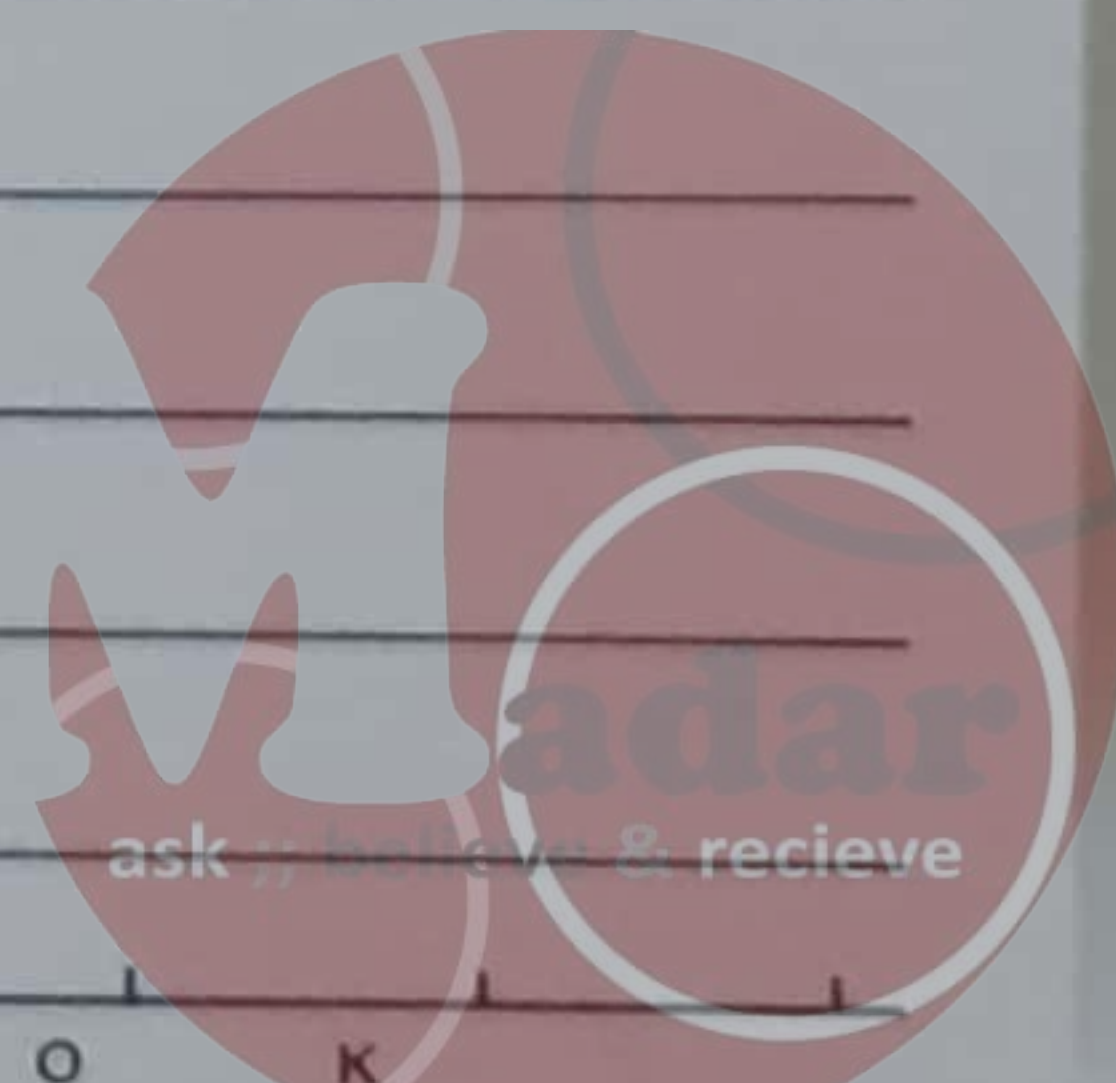
}
correction for the
initial guesses.

$\Rightarrow$ solve using gauss elimination to obtain Δa & Δb .

$\Rightarrow$ The values of Δa & Δb are corrections to the initial guesses, using these corrections we estimate the new values for the parameters.

$$a^{(1)} = a^0 + \Delta a$$

$$b^{(1)} = b^0 + \Delta b$$



check % RE in a & b

$$\%a = \left| \frac{a^{(1)} - a^0}{a^{(1)}} \right| * 100\% \leq Tol$$

لازم التتبع يكونوا

أقل من ال Tol ، إذا

وحدة منهم ما هفت

$$\%b = \left| \frac{b^{(1)} - b^0}{b^{(1)}} \right| * 100\% \leq Tol$$

الشروط بعمل كان

iteration

if any of these checks does not satisfy the condition then another iteration is required.

$$[Z] \begin{matrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{matrix}, \{D\} \begin{matrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{matrix}$$

حمار عني

new [Z] & {D}

وبعمل بنفس الطريقة

#Example :-

x	y
0.25	0.28
0.75	0.57
1.25	0.68
1.75	0.74
2.25	0.79

$$y_c = a_0 (1 - e^{-a_1 x})$$

عنا

2 parameter بالاتي يعودين

}

5 Row

$$[Z] = \begin{bmatrix} (1 - e^{-a_1 x_0}) & (a_0 x_0 e^{-a_1 x_0}) \\ 1 - e^{-a_1 x_1} & a_0 x_1 e^{-a_1 x_1} \\ 1 - e^{-a_1 x_2} & a_0 x_2 e^{-a_1 x_2} \\ 1 - e^{-a_1 x_3} & a_0 x_3 e^{-a_1 x_3} \\ 1 - e^{-a_1 x_4} & a_0 x_4 e^{-a_1 x_4} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ \downarrow \\ \text{initial} \\ \text{guesses} \end{matrix}$$

5×2

$$[Z] \Big|_{\substack{a_0=1 \\ a_1=1}} = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.1947 \\ 0.5276 & 0.3543 \\ 0.7135 & 0.3581 \\ 0.8262 & 0.3041 \\ 0.8946 & 0.2371 \end{bmatrix}$$

5×2

$$\{O\} \Big|_{\substack{1=a_0 \\ 1=a_1}} = \begin{Bmatrix} y(x_0) - (a_0(1 - e^{-a_1 x_0})) \\ y(x_1) - (a_0(1 - e^{-a_1 x_1})) \\ \vdots \\ y(x_4) - (a_0(1 - e^{-a_1 x_4})) \end{Bmatrix}$$

$$\{O\} = \begin{Bmatrix} 0.0588 \\ 0.0424 \\ -0.0335 \\ -0.0862 \\ -0.1046 \end{Bmatrix}$$

$$[Z]^T = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.5276 & 0.7135 & 0.8262 & 0.8946 \\ 0.1947 & 0.3543 & 0.3581 & 0.3041 & 0.2371 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

$$[Z]^T * [Z] = \begin{bmatrix} 2.3193 & 0.9489 \\ 0.9489 & 0.4404 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[Z]^T * \{D\} = \begin{Bmatrix} -0.1533 \\ -0.0365 \end{Bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} [Z]^T * [Z] \end{bmatrix}_{2 \times 2} * \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [Z]^T \{D\} \end{Bmatrix}_{2 \times 1}$$

}

$$\begin{bmatrix} 2.3193 & 0.9489 \\ 0.9489 & 0.4404 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1533 \\ -0.0365 \end{Bmatrix}$$

↓ بخل استخدام
gauss

$$\Delta a_1 = 0.5019$$

$$a_1^{(1)} = 1 + 0.5019 = 1.5019$$

$$\Delta a_0 = -0.2714$$

$$a_0^{(1)} = 1 - (0.2714) = 0.7286$$

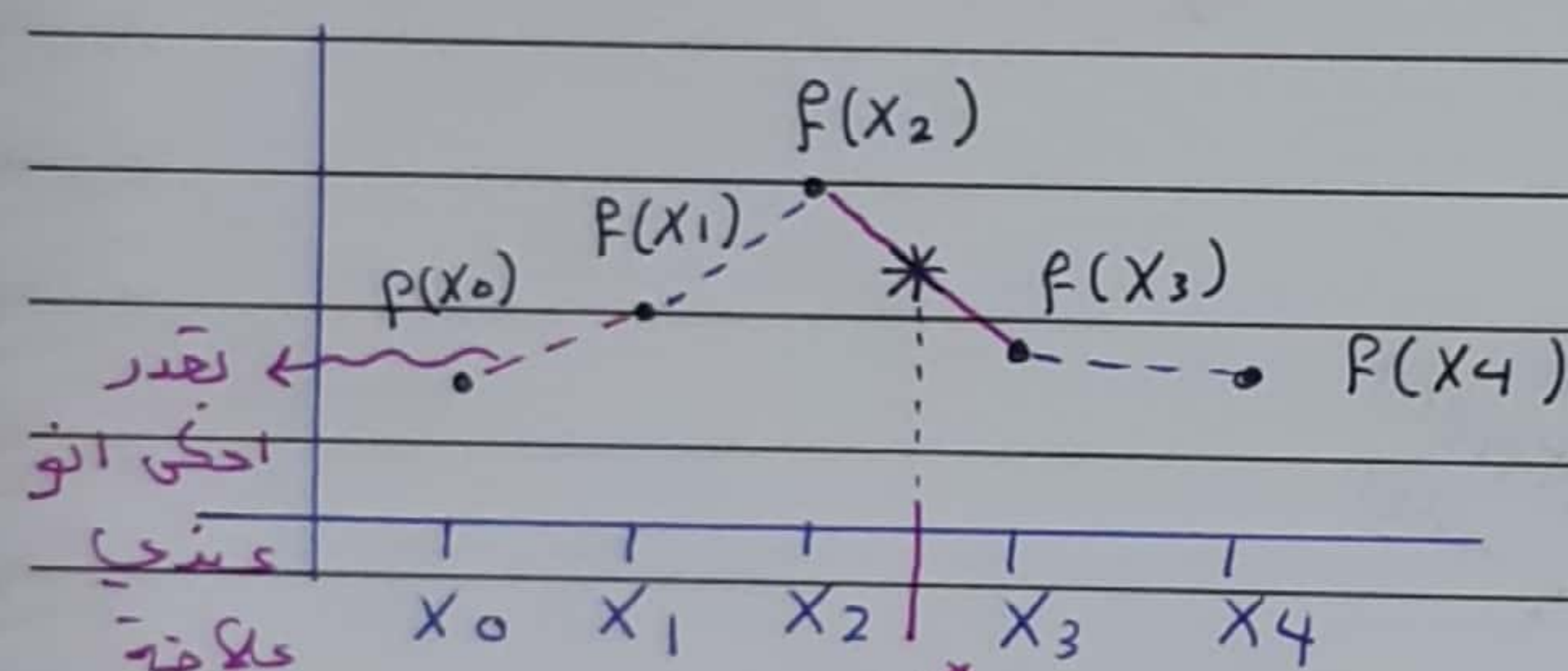
$$\% RE (a_0) = \left| \frac{0.7286 - 1}{0.7286} \right| \times 100\% > Tol$$

← بنعمل كمان iteration

$$\% RE (a_1) = \left| \frac{1.5019 - 1}{1.5019} \right| \times 100\% > Tol$$

← لما حتم ال parameter بتغير
يكون حلنا وصلت للحل

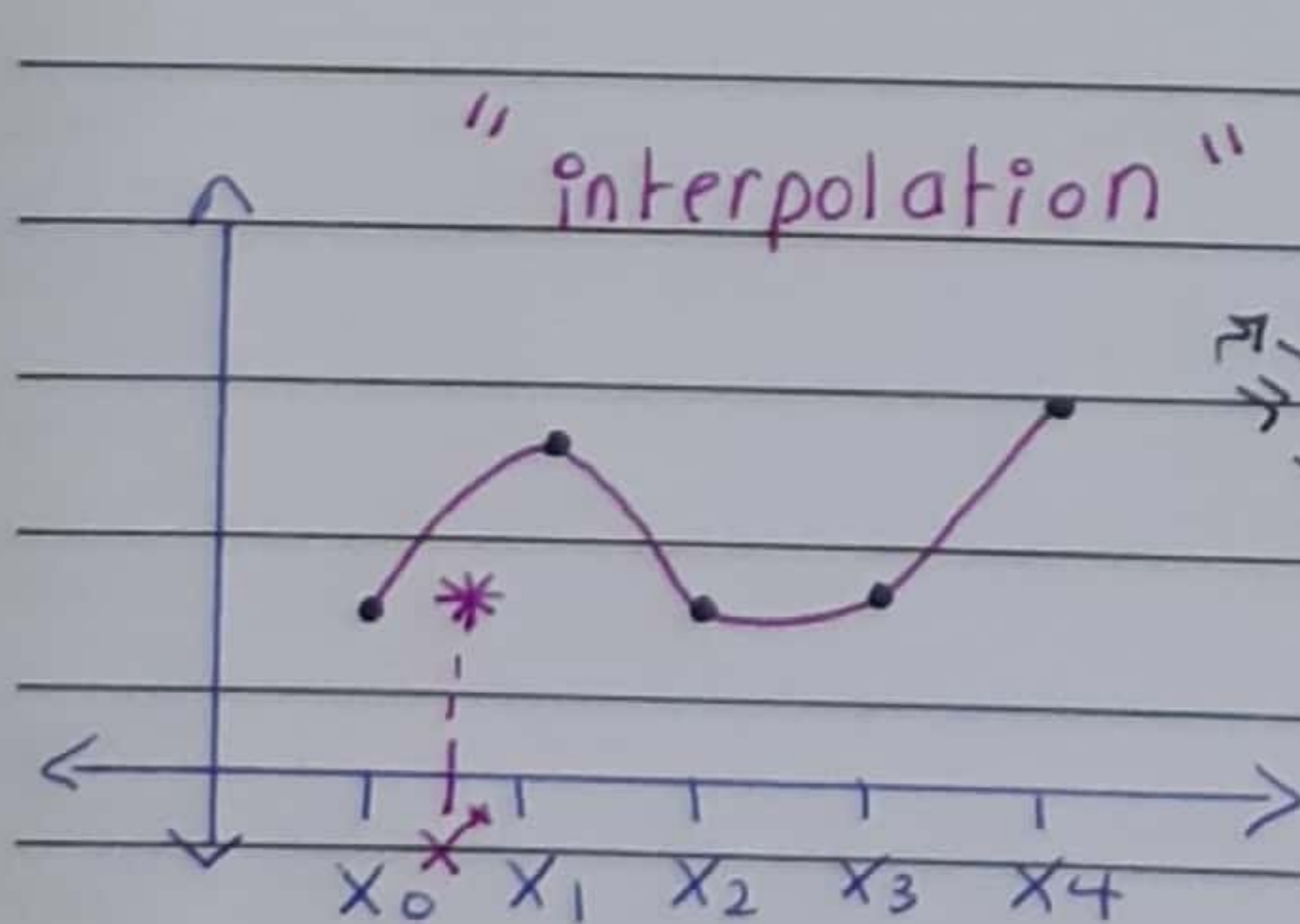
Interpolation :-



علاقة
مباشرة بين
المتغيرين

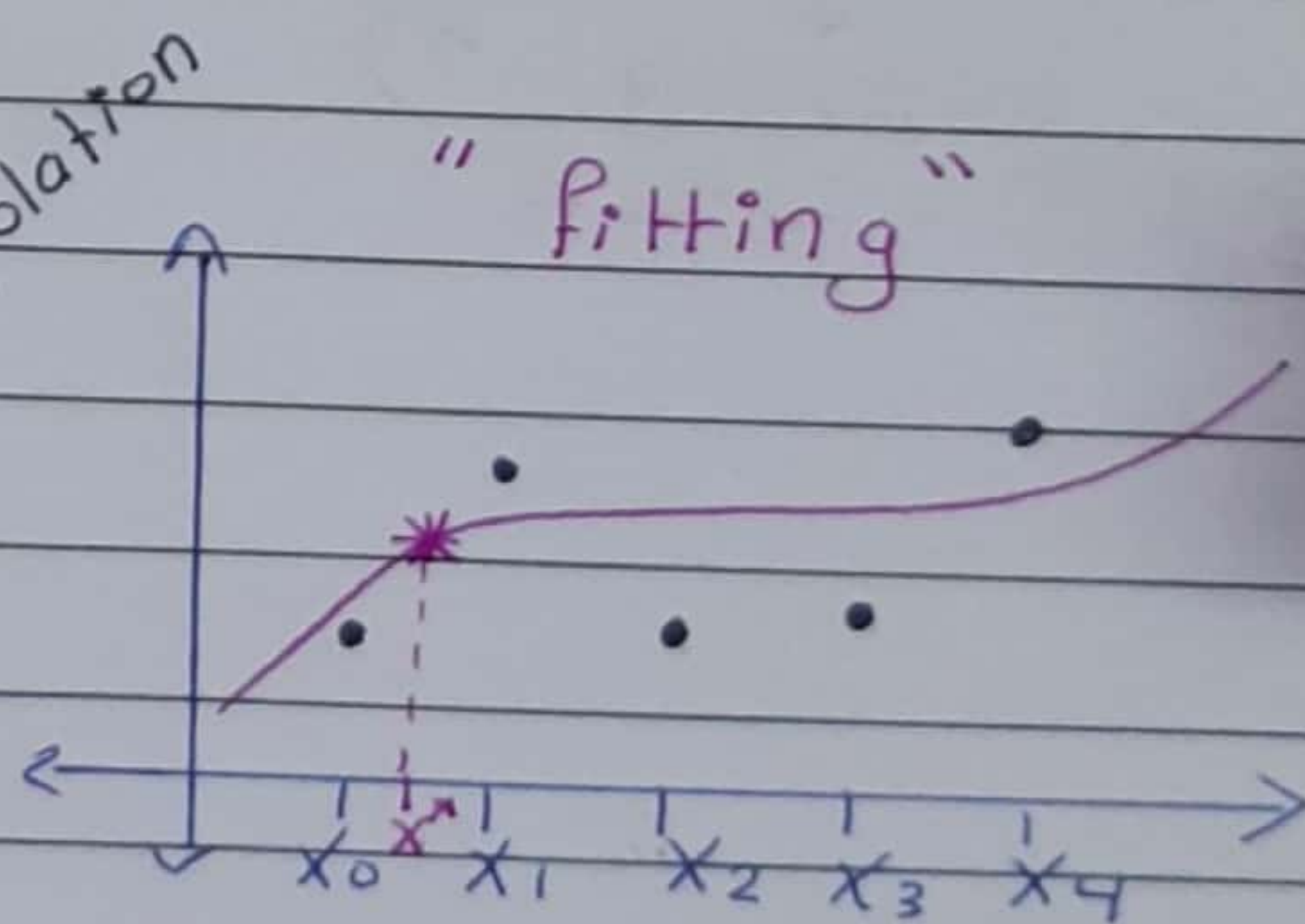
لهاد في حال
اعتبرت ان المتغيرين

linear interpolation



"interpolation"

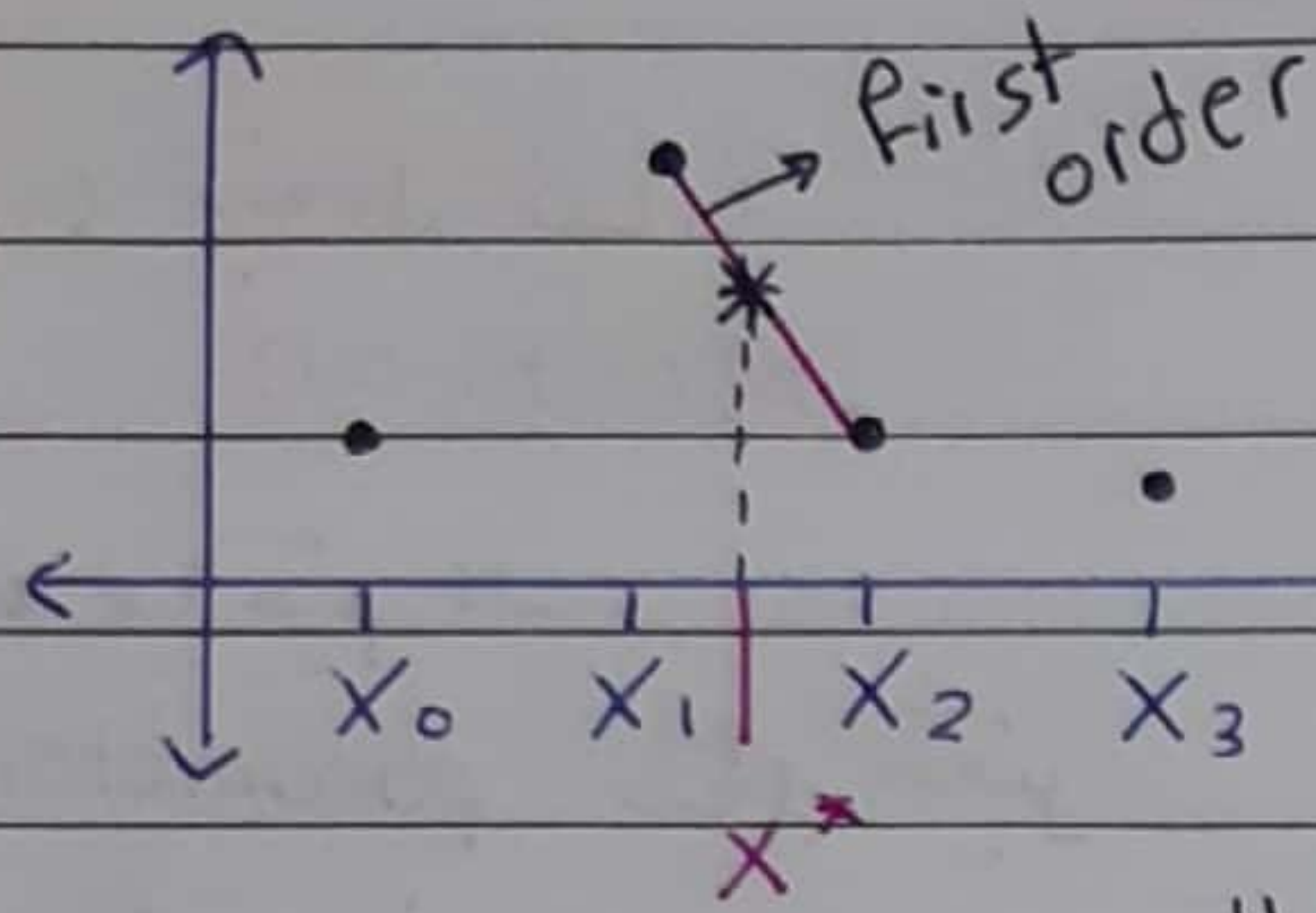
كلما رغبنا
الدرجة
التي يكون



"fitting"

لازم نقر بكل النقاط هنا
4th order ، x* ممكن صورتها
نقر بال curve وممكن لا.

هون مو ضروري يقر بكل النقاط
4th order curve لا
x* صورتها بتكون على ال curve



Interpolation لنفس ال

data بس بدى أرفع ال degree

* لو بدى أسفل كل ال

Range

$$X_0 \leq X^* \leq X_3$$

3rd order

و يكون عنا

2 نقاط

* خطى بغير
Interpolation for different order

① lagrange

② newton's

③ sp line

(accuracy ↑)

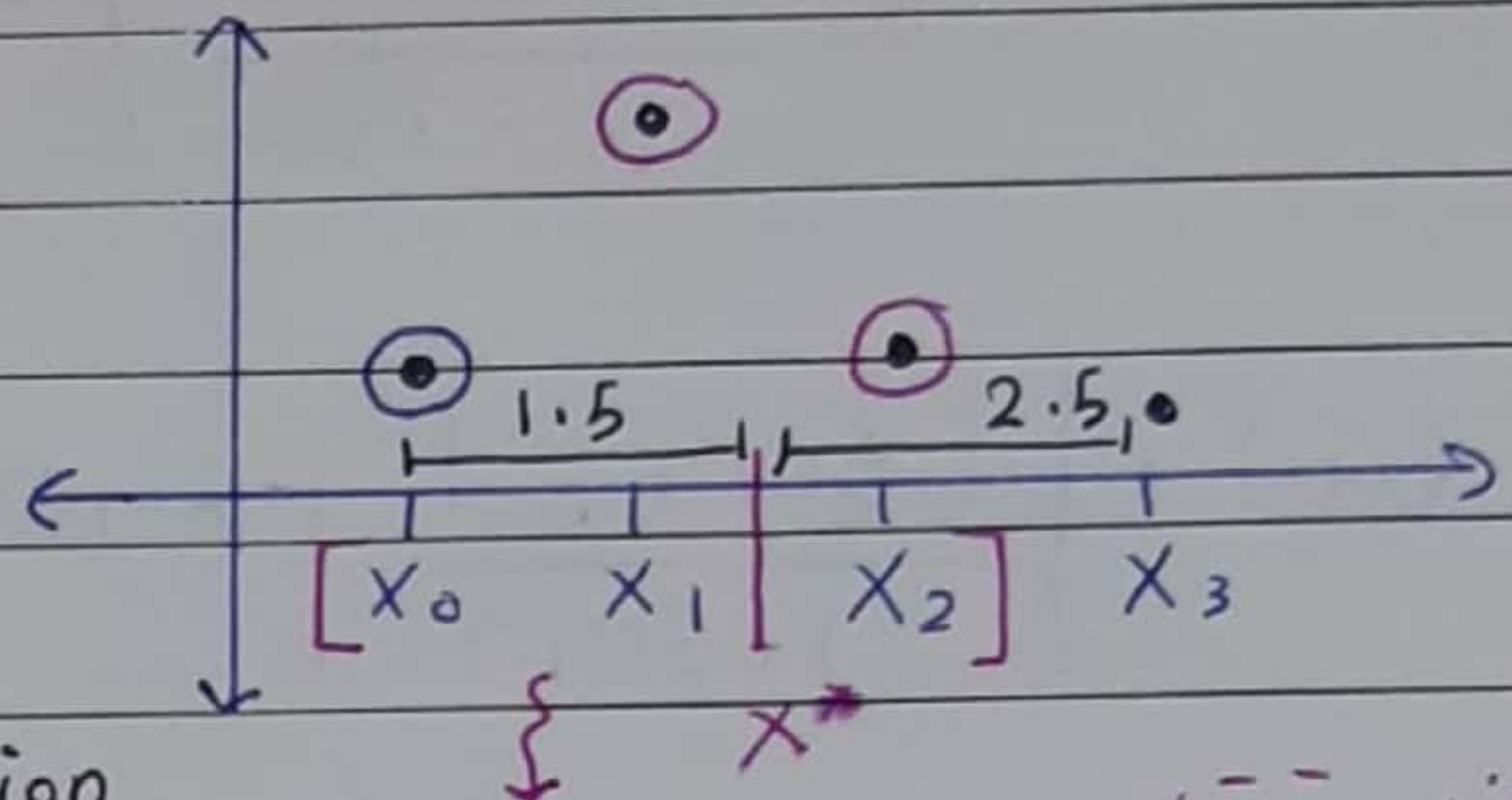
← مقارنة بـ ① & ②

الزيت نفس

الأجوبة يدون

مردقات

1st, 2nd, 3rd, ..



$$X_0 \leq X^* \leq X_2$$

القيم بين معنى

هاد ال Range

لما انى رجعنا

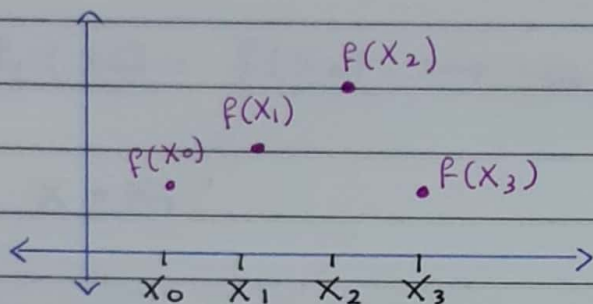
ال degree بدنا

نحان نقطة بناهنا

الأقرب لـ X^*

Interpolation :-

الفروق بينو وبين
curve fitting
عدد النقاط لي بي فيها
كل انقاط لازم بي



lagrange & Newton's

(نقطة الجواب) 1 = n

كل نقطتين بينهم علاقة خطية

1- lagrange :-

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) * f(x_i)$$

for n=1 → First order

$$\sum_{i=0}^1 L_i(x) * f(x_i)$$

$$L_0(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1)$$

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$

$L_i(x) \rightarrow$ lagrange terms

table



$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ممنوع حقيقة
 $j = i$ بشأن الكقام
 بتقسيم حقيقة صفر، اذا
 كانت $j = i$ بـ skip

for $n=1$ (first order)

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

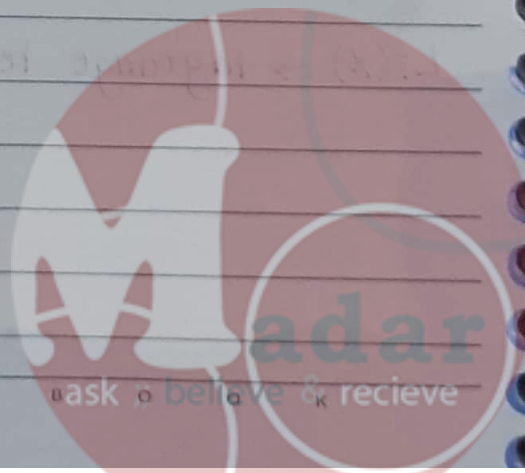
$$F_1(X) = L_0(X) f(x_0) + L_1(X) f(x_1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

unknown

لازم نتأكد انو الـ

function هاد بـ x_0 & x_1



let $x = x_0$

$$P_1(x_0) = \boxed{1} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

$$P_1(x_0) = f(x_0) \rightarrow \text{إذا تعرّفنا النقطة}$$

let $x = x_1$

$$P_1(x_1) = \left(\frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \boxed{1} \left(\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

$$P_1(x_1) = f(x_1) \rightarrow \text{إذا تعرّفنا النقطة}$$

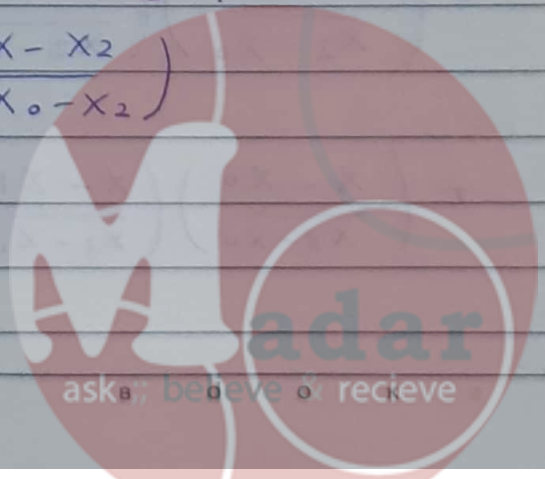
For $n = 2$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i)$$

$$= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

من الجهد مباشرة

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right)$$



$$L_1(X) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{X - X_j}{X_1 - X_j} = \left(\frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \right)$$

$$L_2(X) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{X - X_j}{X_2 - X_j} = \left(\frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right)$$

$$P_2(X) = \left(\frac{X - X_1}{X_0 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_0 - X_2} \right) f(X_0) + \left(\frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \right) f(X_1)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right) f(X_2)$$

تحققنا $X_2 \leq X \leq X_0$
 صنف هاي الفترة

$$P_3(X) = \left(\frac{X - X_1}{X_0 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_0 - X_2} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_0 - X_3} \right) f(X_0)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_1 - X_3} \right) f(X_1)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_2 - X_3} \right) f(X_2)$$

$$X_3 \leq X \leq X_0$$

صنف هاي

الفترة

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_3 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_3 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_3 - X_2} \right) f(X_3)$$

2- Newton's method :-

x_i | $f(x_i)$

x_0 | $f(x_0)$

x_1 | $f(x_1)$ $\Leftarrow$ $x = x$ new

x_2 | $f(x_2)$

$$f_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots$$

unknown $\rightarrow$ $a \rightarrow$ n

$$f_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$

كلما زاد ال order

$n=1$ بقاء $a=a_1$ بوقف عند

بني أزيد عدد النقاط

$$f_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

له قيمتهم نعتد على عدد النقاط لي بنأخذها من الجداول

x_i | $f(x_i)$

$$f_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$

x_0 | $f(x_0)$

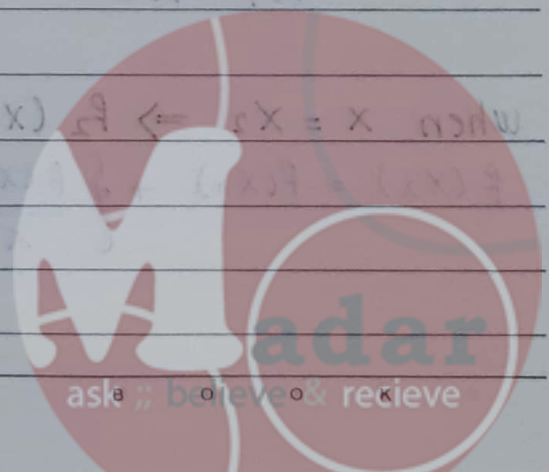
x_1 | $f(x_1)$

$x = x$ new
تقسيم
بمقدار

$$\text{when } x=x_0 \Rightarrow f_1(x) = f(x_0)$$

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0)$$

$$f(x_0) = a_0$$



$$f_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

when $x = x_1 \Rightarrow f_1(x) = f(x_1)$

$$f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} (x - x_0)$$

linear
function

intercept

slope

$$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

when $x = x_0 \Rightarrow f_2(x) = f(x_0)$

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)$$

$$f(x_0) = a_0$$

لذا أيضًا باخذ حورتها

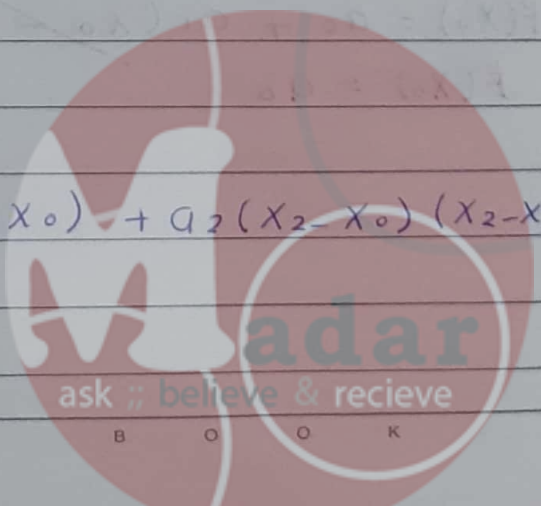
when $x = x_1 \Rightarrow f_2(x) = f(x_1)$

$$f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

when $x = x_2 \Rightarrow f_2(x) = f(x_2)$

$$f(x_2) = f(x_0) + \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$



$$a_2 = \frac{\left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right\} - \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\}}{x_2 - x_0}$$

$$f_2(x) = f(x_0) + \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} (x - x_0) + \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right\} - \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x_2 - x_0}$$

3 - Divided Difference Table :-

تأبعة الطريقة
نيوتن

x_i	$f(x_i)$	1 st D.D	2 nd D.D
x_0	$f(x_0)$	$f(x_1) - f(x_0)$	$\left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right\} - \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$
x_3	$f(x_3)$	$\frac{x_2 - x_1}{f(x_3) - f(x_2)}$	$\left\{ \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right\} - \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right\}$
		$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$	

4

3

2

د كل عود يعطى على
جمله

من بي جملو بواحد
كل عود اقل



Interpolation :-

T(°C)	μ (N.s/m ²)
5	0.08
10	0.05
15	0.03
20	0.018
30	0.009
50	0.006
55	0.0055

Find μ at 17°C using :-

1- 1st & 2nd & 3rd (lagrange) :-

n = 1

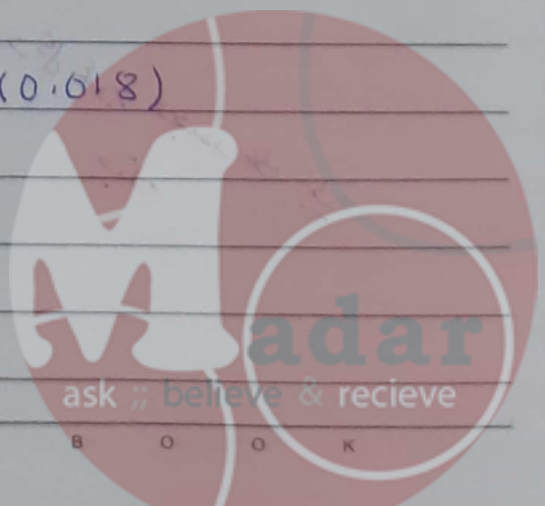
$$\left\{ \begin{array}{l} (x) - (x_0) = 15 \\ (x) - (x_1) = 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = 0.03 \\ f(x_1) = 0.018 \end{array} \right\} \rightarrow \text{نأخذ أي نقطة من بينهن}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$P_1(17) = \frac{17 - 20}{15 - 20} (0.03) + \frac{17 - 15}{20 - 15} (0.018)$$

$$= 0.0252$$



$n = 2$

$X_0 = 10$

$P(X_0) = 0.05$

$X_1 = 15$

$P(X_1) = 0.03$

$X_2 = 20$

$P(X_2) = 0.018$

بقر آخذ هاي
النقطة بناءً
على اكسافة
الاثوب لا 17
ا نفس بعض باخذ
أي وحدة ما بغرف

$$P_2(X) = \left(\frac{X - X_1}{X_0 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_0 - X_2} \right) \times P(X_0)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \right) \times P(X_1)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right) \times P(X_2)$$

$$P(17) = \left(\frac{17 - 15}{10 - 15} \right) \left(\frac{17 - 20}{10 - 20} \right) (0.05) + \left(\frac{17 - 20}{15 - 10} \right) \left(\frac{17 - 20}{15 - 20} \right) (0.03)$$

$$+ \left(\frac{17 - 10}{20 - 10} \right) \left(\frac{17 - 15}{20 - 15} \right) (0.018)$$

$= 0.02424$

$n = 3$

$X_0 = 10$

$P(X_0) = 0.05$

$X_1 = 15$

$P(X_1) = 0.03$

$X_2 = 20$

$P(X_2) = 0.018$

$X_3 = 30$

$P(X_3) = 0.009$



$$P_3(X) = \left(\frac{X - X_1}{X_0 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_0 - X_2} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_0 - X_3} \right) f(X_0)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_1 - X_3} \right) f(X_1)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_3}{X_2 - X_3} \right) f(X_2)$$

$$+ \left(\frac{X - X_0}{X_3 - X_0} \right) \left(\frac{X - X_1}{X_3 - X_1} \right) \left(\frac{X - X_2}{X_3 - X_2} \right) f(X_3)$$

$$P_3(17) = \left(\frac{17 - 15}{10 - 15} \right) \left(\frac{17 - 20}{10 - 20} \right) \left(\frac{17 - 30}{10 - 30} \right) (0.05)$$

$$+ \left(\frac{17 - 10}{15 - 10} \right) \left(\frac{17 - 20}{15 - 20} \right) \left(\frac{17 - 30}{20 - 30} \right) (0.03)$$

$$+ \left(\frac{17 - 10}{20 - 10} \right) \left(\frac{17 - 15}{20 - 15} \right) \left(\frac{17 - 30}{20 - 30} \right) (0.018)$$

$$+ \left(\frac{17 - 10}{30 - 10} \right) \left(\frac{17 - 15}{30 - 15} \right) \left(\frac{17 - 20}{30 - 20} \right) (0.009)$$

$$= 0.024366$$

2- 1st, 2nd, 3rd Newton's interpolation :-

$$n = 1$$

$$X_0 = 15$$

$$f(X_0) = 0.03$$

$$X_1 = 20$$

$$f(X_1) = 0.018$$

$$f_1(X) = a_0 + a_1(X - X_0)$$

$$= f(X_0) + \left\{ \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0} \right\} (X - X_0)$$



Subject :

Chapter 5

29/12/2021

$$f_1(17) = 0.03 + \left(\frac{0.018 - 0.03}{20 - 15} \right) (17 - 15)$$

$$= 0.0252$$

$$n = 2$$

$$x_0 = 10 \quad f(x_0) = 0.05$$

$$x_1 = 15 \quad f(x_1) = 0.03$$

$$x_2 = 20 \quad f(x_2) = 0.018$$

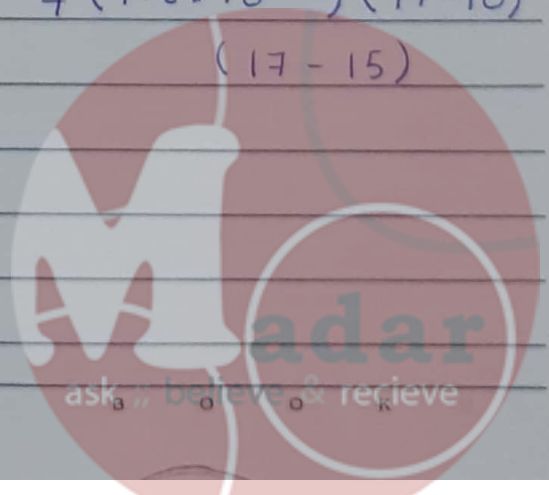
$$f_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$a_0 = f(x_0) = 0.05$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.03 - 0.05}{15 - 10} = -4 \times 10^{-3}$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) - \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)}{x_2 - x_0}$$
$$= \frac{\left(\frac{0.018 - 0.03}{20 - 15} \right) - \left(\frac{0.03 - 0.05}{15 - 10} \right)}{20 - 10} = 1.6 \times 10^{-4}$$

$$f_2(17) = (0.05) + (-4 \times 10^{-3})(17 - 10) + (1.6 \times 10^{-4})(17 - 10)(17 - 15)$$
$$= 0.02424$$



$$n = 3$$

$$x_0 = 10$$

$$f(x_0) = 0.05$$

$$x_1 = 15$$

$$f(x_1) = 0.03$$

$$x_2 = 20$$

$$f(x_2) = 0.018$$

$$x_3 = 30$$

$$f(x_3) = 0.009$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$a_0 = 0.05$$

$$a_1 = -4 \times 10^{-3}$$

$$a_2 = 1.6 \times 10^{-6}$$

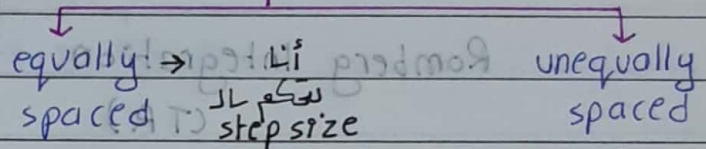
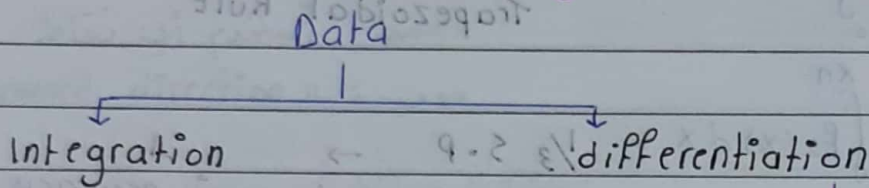
$$a_3 = \left[\left(\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right) - \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \right] \times \frac{1}{x_3 - x_0}$$

$$= -0.000003$$

$$P_3(x) = 0.024366$$



Differentiation & Integration :-



$$\Delta X_1 = \Delta X_2$$

Finite divided

difference

1st, 2nd, 3rd difference

forward

backward

[central]

more accuracy

$$\Delta X_1 \neq \Delta X_2$$

X_{i-2} X_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2}

backward

central

forward

Richardson extrapolation

integration

single

multiple

1D

2D

3D

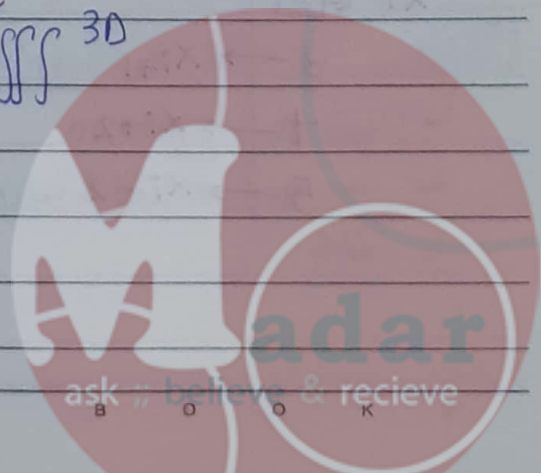
x_n

x_0

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

any function represent data

data



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f_1(x) dx = TR \text{ (weak)}$$

Trapezoidal Rule

$$\int_{x_0}^{x_n} f_2(x) dx = \frac{1}{3} S.P \rightarrow \text{accuracy}$$

$$\frac{3}{8} S.R \rightarrow \text{TR}$$

Romberg Integration

(TR)

Differentiation :-

x_i	$f(x_i)$
x_{i-2}	$f(x_{i-2})$
x_{i-1}	$f(x_{i-1})$
x_i	$f(x_i) \rightarrow$ point of interest
x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
x_{i+2}	$f(x_{i+2})$

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4$
equally spaced step size

Float point location
أنا مجرد الـ location بنوعها

النقطة التي أريد حولها الـ derivative

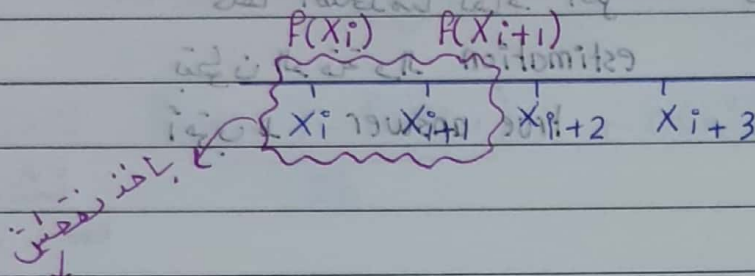
x_i	$f(x_i)$
1	$\rightarrow x_{i-1}$
2	$\rightarrow x_i$
3	$\rightarrow x_{i+1}$
4	$\rightarrow x_{i+2}$
5	$\rightarrow x_{i+2}$

عند أي نقطة بالجدول
يقدر أوجد مباشرة أما لو بدى
أوجد عند الـ 2.5 مثلاً ما يقدر
لأن الـ step size راج يكون
مختلفة

Forward finite difference :-

مستوح استخدم أي نقاط

Forward direction بالـ

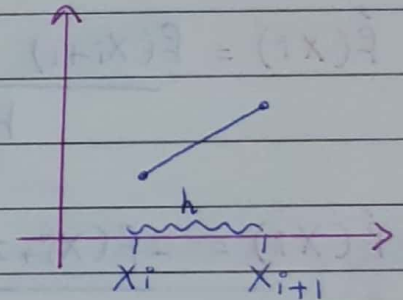


$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

step size ← h

order of the error

يعني اذا حسبت لكافة للنفس و بحسب وهكذا...



3 نقاط كذا

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

error بهاي أقل من الأولي

2h

كلما زادت كلما زادت الـ accuracy في الحسابات

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

تدل أن الـ Formula صحيحة

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

لا استعملنا 3 نقاط

لـ زادت الـ accuracy لـ استعملنا 4 نقاط بدل من 3 نقاط

Differentiation :-

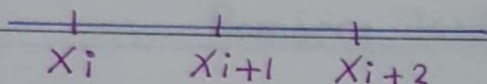
① equally spaced data points :

A - Forward direction :-

كلما استخدمنا نقاط أكثر

تكون الدقة وال estimation

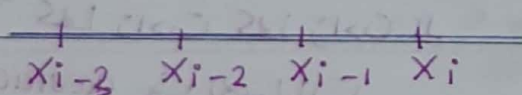
أقرب لل true answer



$$\hat{f}(X_i) = \frac{f(X_{i+1}) - f(X_i)}{h} + O(h)$$

$$\hat{f}(X_i) = \frac{-f(X_{i+2}) + 4f(X_{i+1}) - 3f(X_i)}{2h} + O(h^2)$$

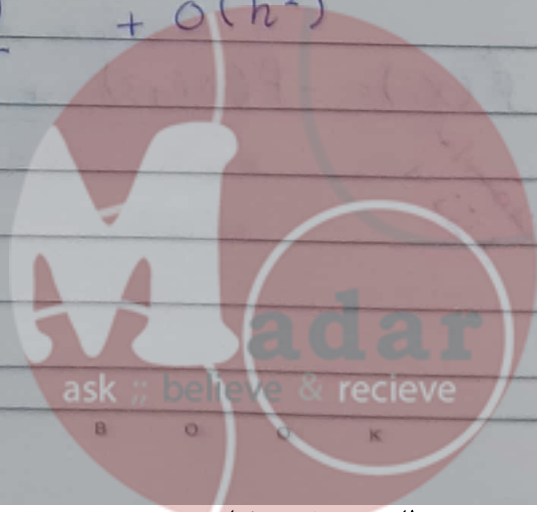
B - Backward :-



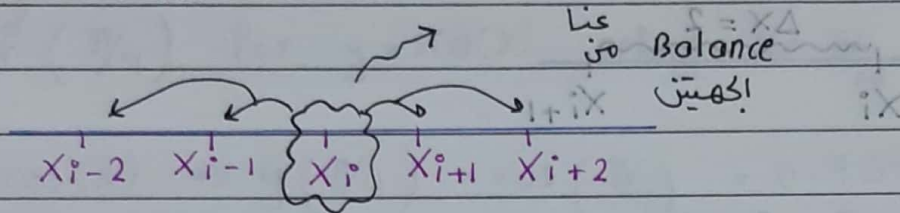
$$\hat{f}(X_i) = \frac{f(X_i) - f(X_{i-1})}{h} + O(h)$$

تقريباً نفس ال error في حال Forward

$$\hat{f}(X_i) = \frac{3f(X_i) - 4f(X_{i-1}) + f(X_{i-2})}{2h} + O(h^2)$$



c - central Formula :-



$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

أخذنا 3 نقاط وما دخلنا

ال x_i بالحسابات

على عكس ال

Backward & Forward

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} + O(h^4)$$

بسن 4 نقاط
ال x_i ما دخلنا

بقناعف

Taylor series Forward :-

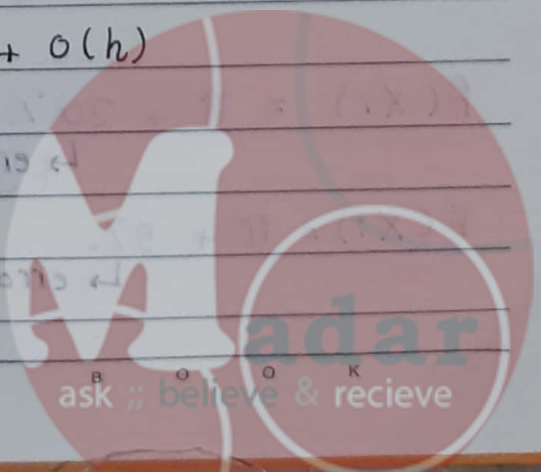
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots$$

كلما زدنا عدد ال derivative في ال Function

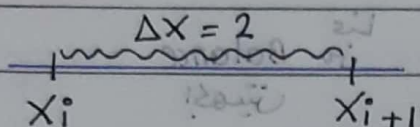
يكون x_i أقرب للقيمة الحقيقية

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$



$O(h)$:-

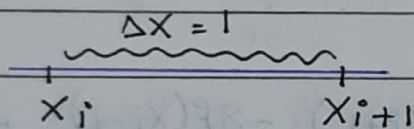


$$f'(X_i) = \frac{f(X_{i+1}) - f(X_i)}{2}$$

True answer = 4

$$f'(X_i) = 3 + 25\%$$

↳ error



reduction

step size = error

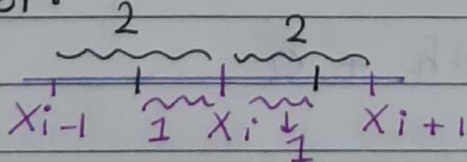
$$f'(X_i) = 1 + 12.5\%$$

↳ error

error
50%

If the error is $O(h)$ halving the step size will halve the error

If the error is $O(h^2)$ halving the step size will quarter the error.

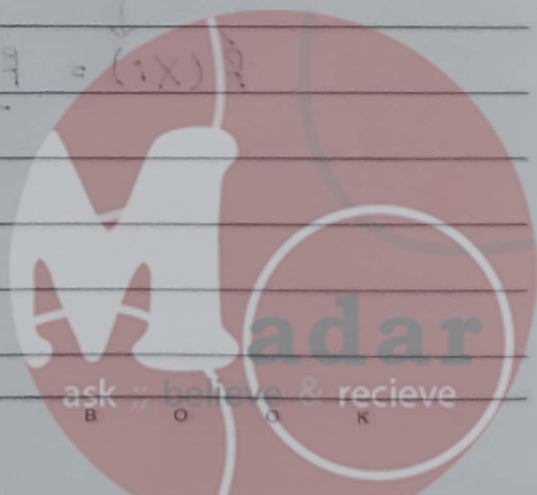


$$f'(X_i) = 11 + 20\%$$

↳ error

$$f'(X_i) = 11 + 5\%$$

↳ error



Example :-

Find $f(\pi/4)$ for $y = \sin(x)$ using $h = \pi/12$

$$y = \cos(x) \Rightarrow y(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 0.7071$$

true answer

هذه الطريقة حل عادي

أما بالنوميريكال يفترض أنا

ما يعرف المشتقة بالتالي راح

أستخدم الفرق لي بدوهم

table.

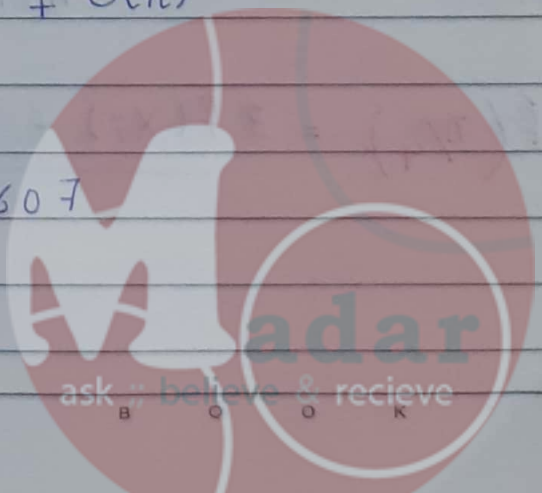
1- using Forward Formula $O(h)$ & $O(h^2)$:- أول خطوة بدنا نعمل جدول

X	f(X)
$x_i = \pi/4$	0.7071
$x_{i+1} = \pi/3$ $\pi/4 + \pi/12$	0.866
$x_{i+2} = 5\pi/12$ $\pi/4 + 2\pi/12$	0.9659

$x_i \quad \quad x_{i+1} \quad \quad x_{i+2}$
 $O(h^2)$
 $O(h)$

$$f(\pi/4) \Big|_{2 \text{ data}} = \frac{f(\pi/3) - f(\pi/4)}{(\pi/12)} + O(h)$$

$$= \frac{0.866 - 0.7071}{\pi/12} = 0.607$$



$$\hat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Big|_{3 \text{ data}} = \frac{f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

$$= \frac{0.9659 + 4(0.866) - 3(0.7071)}{2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= 0.7196$$

2- Backward directions :-

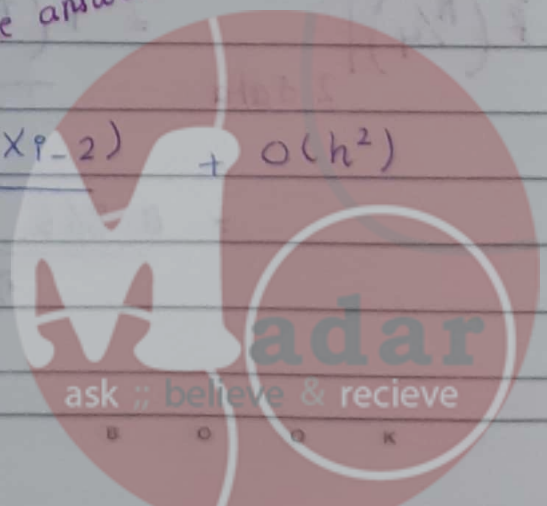
x_i	$f(x)$
$x_{i-2} = \pi/12$	0.259
$x_{i-1} = \pi/6$	0.5
$x_i = \pi/4$	0.7071

$$\hat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

$$= \frac{0.7071 - 0.5}{\pi/12} = 0.791$$

لأنه طبيعي عن الـ
true answer.

$$\hat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2)$$



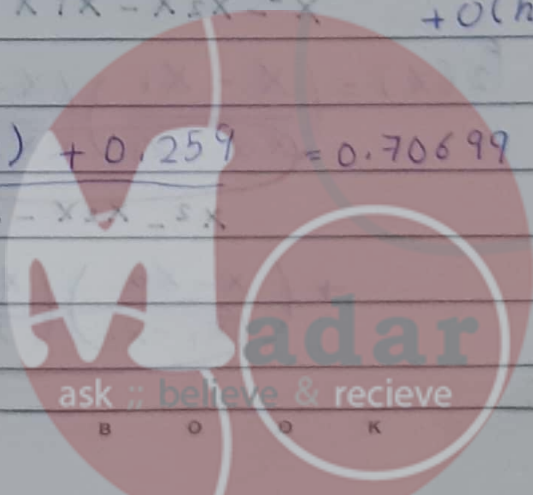
$$= \frac{3(0.7071) - 4(0.5) + 0.259}{2(\pi/12)} = 0.72632$$

3 - using central $O(h^2)$, $O(h^4)$ we have at least 3 points that represent the function

x	$f(x)$
$\pi/12$	0.259
$\pi/6$	0.5
$x_i \leftarrow \pi/4$	0.7071
$\pi/3$	0.866
$5\pi/12$	0.9659

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Big|_{3 \text{ data}} &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \\ &= \frac{0.866 - 0.5}{2(\pi/12)} = 0.699 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Big|_{5 \text{ data}} &= \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} + O(h^4) \\ &= \frac{0.9659 + 8(0.866) - 8(0.5) + 0.259}{12(\pi/12)} = 0.70699 \end{aligned}$$



② unequally spaced step size : يُحقق على المشتقة في
بني أوجدتها

$P'(x_i) \rightarrow$ at least we have to find a 2nd order function that represents the points.

$P'(x_i) \rightarrow$ at least we have to find a 3rd order function that represents the points.

$$P_2(x) = L_0(x) P(x_0) + L_1(x) P(x_1) + L_2(x) P(x_2)$$

$$L_0 = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right)$$

x_i	$P(x_i)$
x_0	$P(x_0)$
x_1	$P(x_1)$
x_2	$P(x_2)$

$$L_1 = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)$$

$$L_2 = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2$$

$$P_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) P(x_0)$$

$$x^2 - x_2x - x_0x + x_0x_2$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) P(x_1)$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) P(x_2)$$

$$x^2 - x_1x - x_0x + x_0x_1$$

$$P_2(x) = (x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)A + (x^2 - x_2x - x_0x + x_0x_2)B + (x^2 - x_1x - x_0x + x_0x_1)C$$

$$P_2'(x) = (2x - x_2 - x_1)A + (2x - x_2 - x_0)B + (2x - x_0 - x_1)C + O(h^2)$$

$$x_0 \leq x \leq x_2$$

including x_0, x_1, x_2

Example :-

Find $f'(0)$

x	y
$x_0 \leftarrow 0$	0.1
$x_1 \leftarrow 1$	0.4
$x_2 \leftarrow 3$	0.9

$\Delta x = 1$

$\Delta x = 2$

$$f'(0)$$

$$O(h)$$

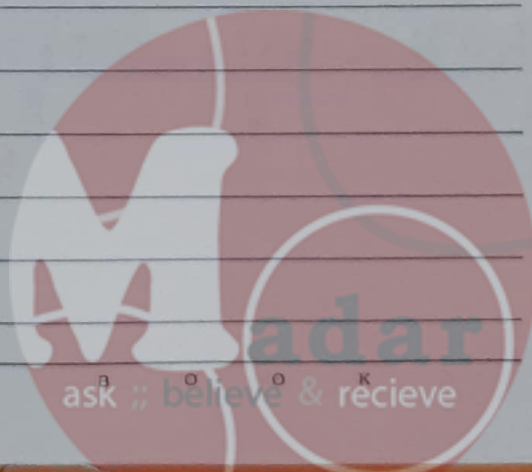
$$\text{Forward} \quad f'(0) = \frac{0.4 - 0.1}{1} = 0.3$$

$$O(h)$$

$$f'(0)$$

$$O(h^2)$$

$$\neq x$$



$$\hat{P}(0) |_{O(h^2)} = (2X - X_1 - X_2)A + (2X - X_0 - X_2)B + (2X - X_0 - X_1)C$$

$$1X_0X + X_0X - X_1X - X_2X$$

$$= \frac{(2(0) - 3 - 1)(0.1)}{(0-1)(0-3)} + \frac{(2(0) - 0 - 3)(0.4)}{(1-0)(1-3)} + \frac{(2(0) - 0 - 1)(0.9)}{(3-0)(3-1)}$$

$$= \frac{(0-1)(0-3)}{(1-0)(1-3)} + \frac{(1-0)(1-3)}{(3-0)(3-1)}$$

$$= 0.31664$$

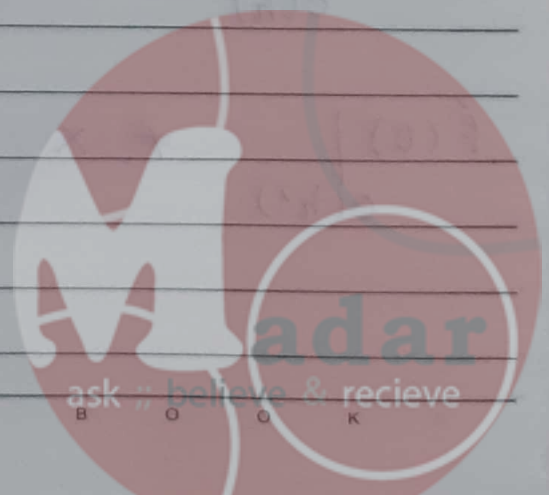
$$(3-0)(3-1)$$

$$5X \geq X \geq 0X$$

$$5X, X, 0X \text{ probability}$$

Example 3:
Find $P(0)$

P	X
1.0	$0 \rightarrow X_0$
0.0	$1 \rightarrow X_1$
0.0	$3 \rightarrow X_2$



Numerical integration :-

① equations

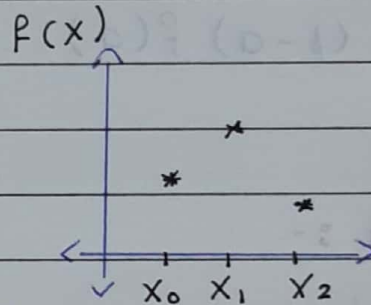
② Data

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{e^x \cos(\ln x)}{(x^2 - x) \sin(x)} dx$$

x	f(x)
x ₀	f(x ₀)
x ₁	f(x ₁)
x ₂	f(x ₂)

راج لاخذ الخالص
 $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$ & $\Delta x_1 = \Delta x_2$

$$\int_{x_0}^{x_n} f_n(x) dx$$



$$\int_{x_0}^{x_n} f_1(x) dx, \int_{x_0}^{x_n} f_2(x) dx, \int_{x_0}^{x_n} f_3(x) dx$$

First order

second order

3rd order

كلما زدنا ال order

لا Function يكون افضل

Open formula :- مش دقتة كثير ، وبتقدر

نستعملها لغاية ك نقاط بشرط

تكون Δx نفسها .

Points

segments

Formula

2

1

$$(b - a) f(x_1)$$

3

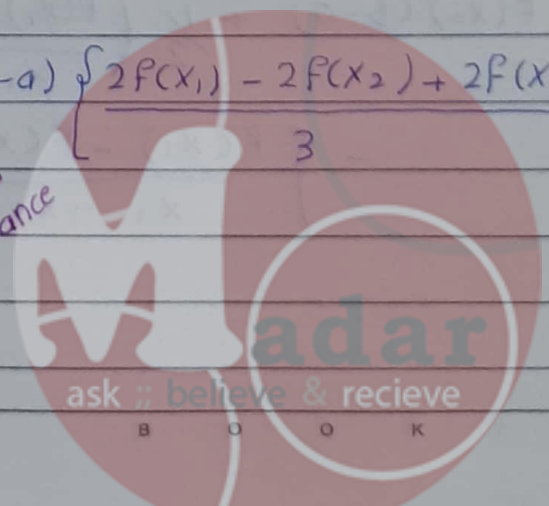
2

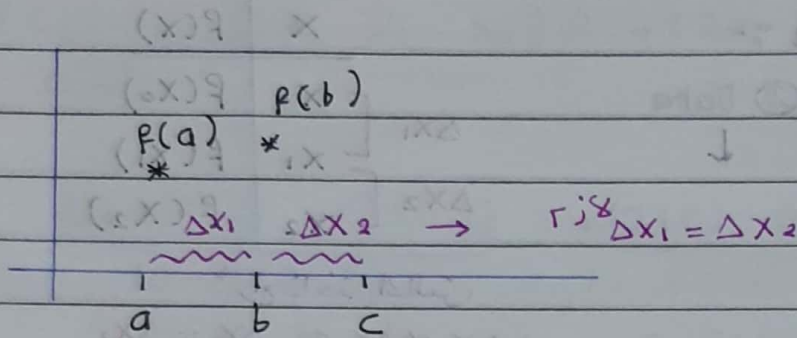
$$(b - a) \left[\frac{2f(x_1) - 2f(x_2) + 2f(x_3)}{3} \right]$$

النقاط

أقل من عدد النقاط 1

بناخذ دقتة مطلقة لانها distance



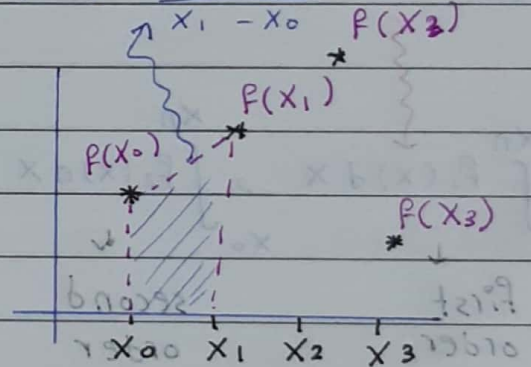


$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a)$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

closed formula :-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx$$

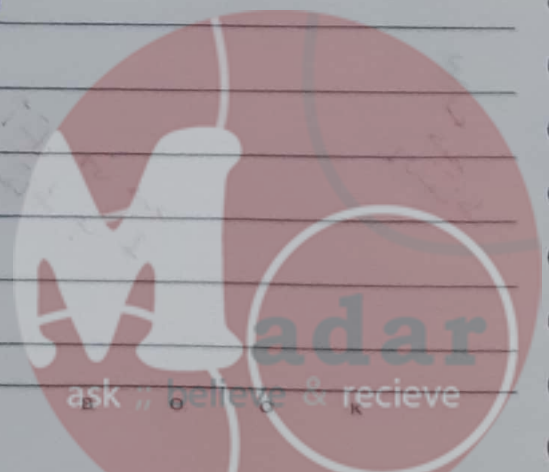


$$\int_a^b \left(\underbrace{f(x_0)}_{\text{constant}} + \underbrace{\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)}_{\text{constant}} (x - x_0) \right) dx$$

$$\left[f(x_0) x \right]_a^b + \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x^2 \right]_a^b - \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_0 x \right]_a^b$$

$$f(x_0)(b-a) + \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) (b^2 - a^2)$$

$$- \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x_0 (b-a)$$

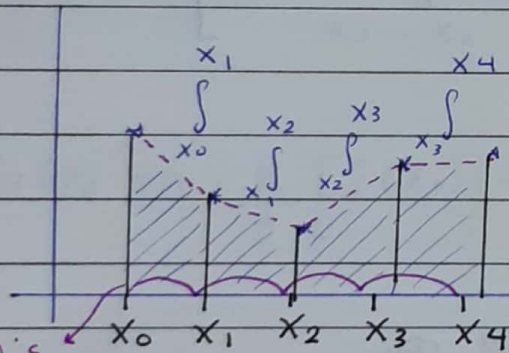
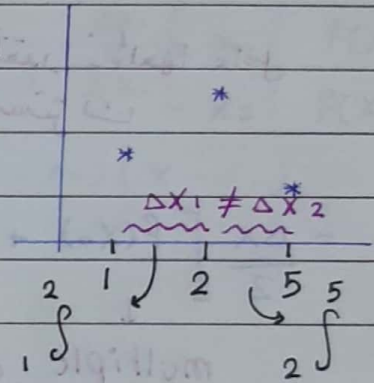


$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(f(a) + f(b))(b-a)}{2}$$

single application of trapezoidal rule

لأبسط طريقة بتعبر عن التكامل بين نقطتين (single)

double ← إذا كنا 2 segment
multiple ← إذا كنا أكثر من هيك



عنا أكثر من trapezoidal

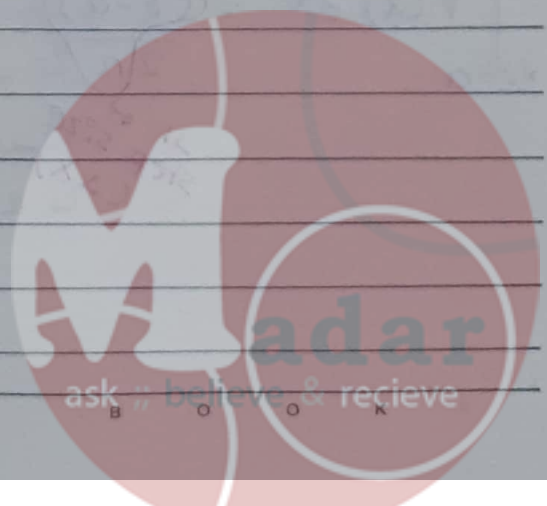
$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{(x_1 - x_0) (f(x_1) + f(x_0))}{2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{(x_2 - x_1) (f(x_2) + f(x_1))}{2}$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \frac{(x_3 - x_2) (f(x_3) + f(x_2))}{2}$$

$$\int_{x_3}^{x_4} f(x) dx = \frac{(x_4 - x_3) (f(x_4) + f(x_3))}{2}$$



$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx$ (Total integration)

$$= \frac{(x_1 - x_0)}{2} (f(x_1) + f(x_0)) + \frac{(x_2 - x_1)}{2} (f(x_2) + f(x_1))$$

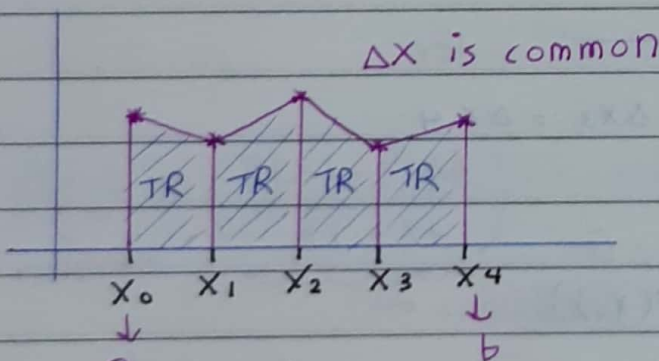
$$+ \frac{(x_3 - x_2)}{2} (f(x_3) + f(x_2)) + \frac{(x_4 - x_3)}{2} (f(x_4) + f(x_3))$$

(Δx is common)

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4$ مشترك

$$= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)]$$

multiple application of T.R



segment = $\frac{b-a}{4}$

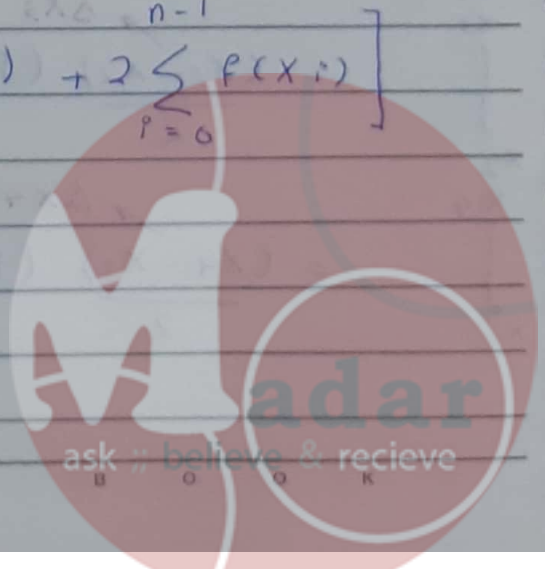
درجة آخر نقطة $\rightarrow n \rightarrow 4$
لأن ما بيلشنا من الصفر
لو بيلشنا من الصفر بنقسم على عدد
النقاط

$x_n = b$

$x_0 = a$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

step size (Δx)



Subject :

Chapter 5

10 / 1 / 2022

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} p_2(x) dx$$

$\hookrightarrow a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$

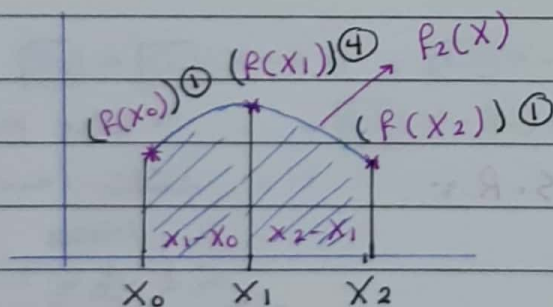
order

$$p_2(x) = f(x_0) + \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} (x - x_0) + \left[\frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0)(x - x_1)$$

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$

$\Delta x_1 = x_1 - x_0$
 $\Delta x_2 = x_2 - x_1$

$$\int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$



$$\frac{(x_1 - x_0)}{3} \text{ or } \frac{(x_2 - x_1)}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

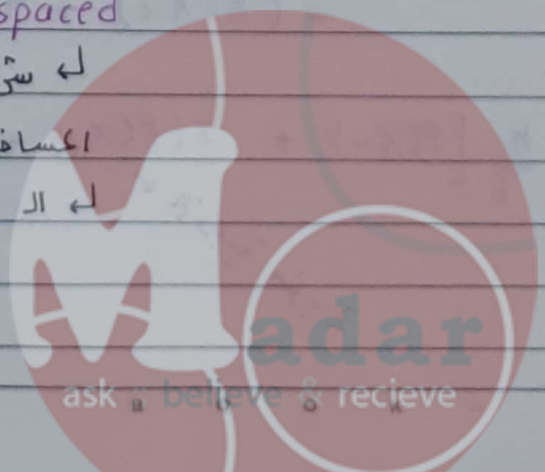
single $\frac{1}{3}$ Simpson Rule $\rightarrow$ 3 data point equally spaced

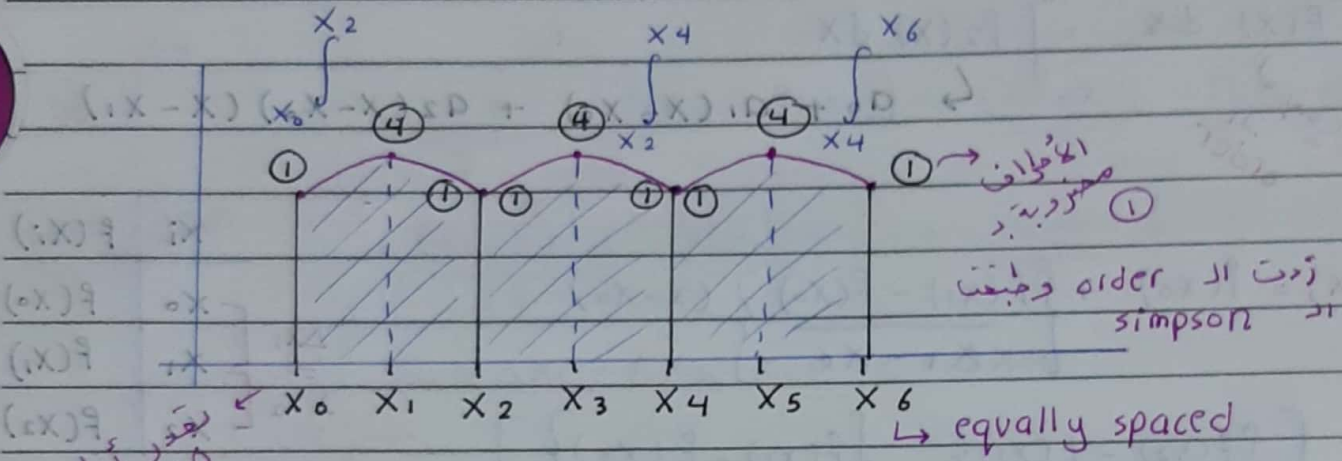
له شرط يكون 3 نقاط بينهم نفس

المسافة اذا لا يروح على ال T.R

له ال accuracy في ال ايات اولى من

T.R





multiple TR

(7 T.R)

② [1, 2]

intermediate
مختبرين د
4

مختبرين د
2

Multiple application of $1/3$ S.R :-

$$\int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_4} + \int_{x_4}^{x_6}$$

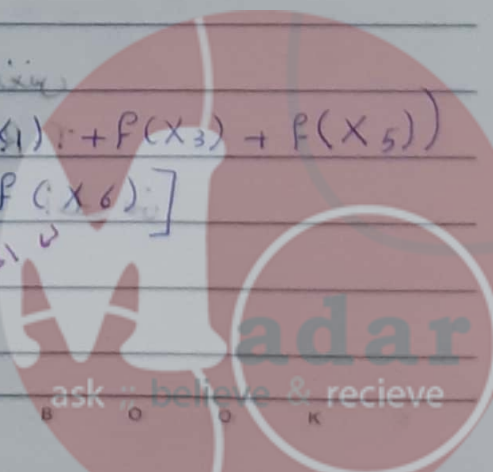
$$\frac{h}{3} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))]$$

$$\frac{h}{3} [f(x_0) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + f(x_6)]$$

الدرجة مختبر 2

الدرجة مختبر 4

الدرجة مختبر 1



Multiple $\frac{1}{3}$ S.R. in x column to random dim of y

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) \right)$$

one common step size

$$\Delta x = h \quad \Delta x = h$$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2$

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f_3(x) dx$$

3rd order function

x_i	$f(x_i)$
x_1	
x_2	Δx_1
x_3	Δx_2
x_4	Δx_3

common step size

$$f_3(x) = [a_0] + [a_1](x-x_0) + [a_2](x-x_0)(x-x_1) + [a_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

لـ 4 نقاط

عشان أحده هذا

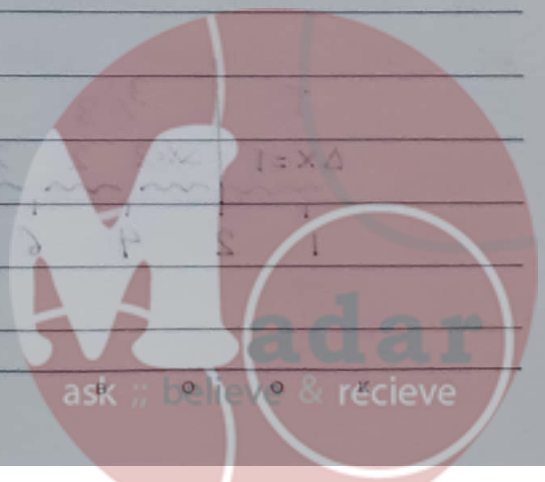
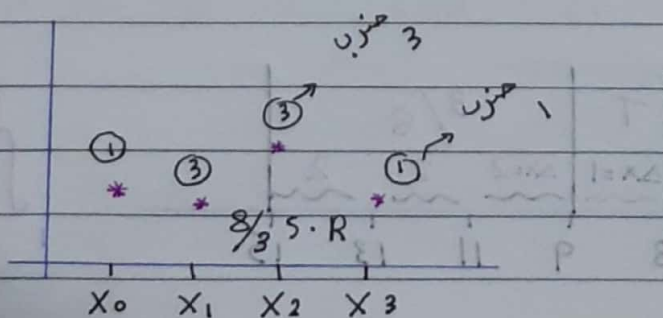
model

سوط يكونوا

equally step size

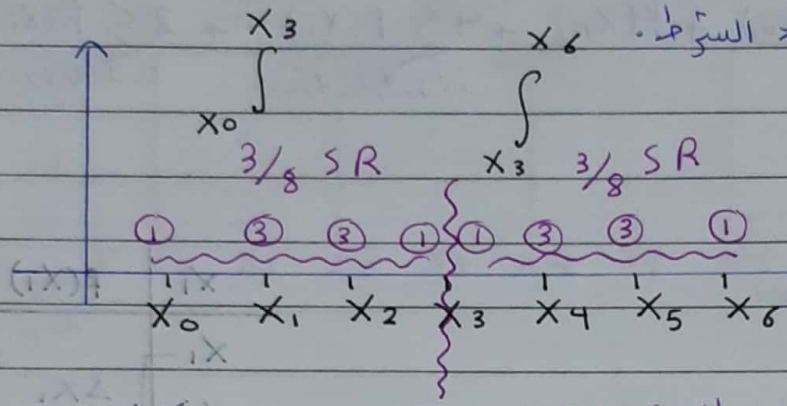
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$\frac{3}{8}$ S.R.



Try to min number of formula & max number of data points.

لكل الفترات بغير أدجده منها
بس الأفضل لي يتحقق هاد الشرط



→ double application
for 3/8 S.R

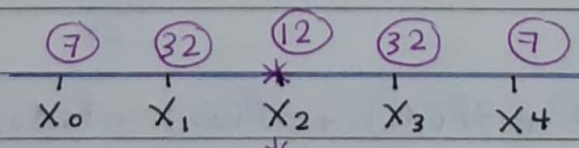
لكل $\Delta x > 1$ عدد
النقاط أو
تكون أكثر

common step size

Boole's Formula :-

5 data points
equally spaced

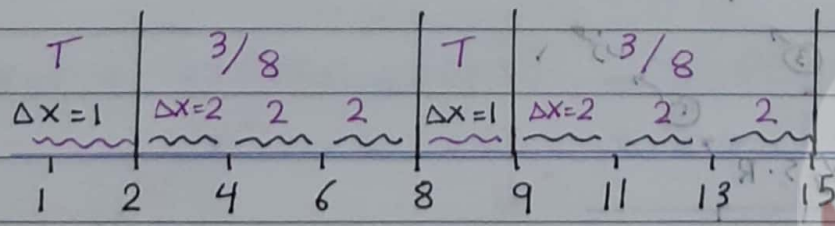
$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{(x_4 - x_0)}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$



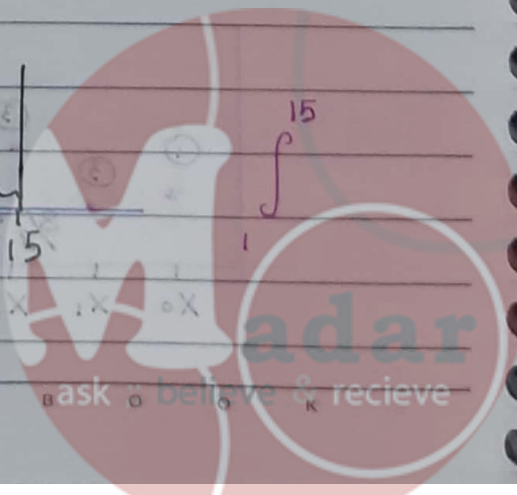
→ equally spaced

unequally spaced =>

Balance

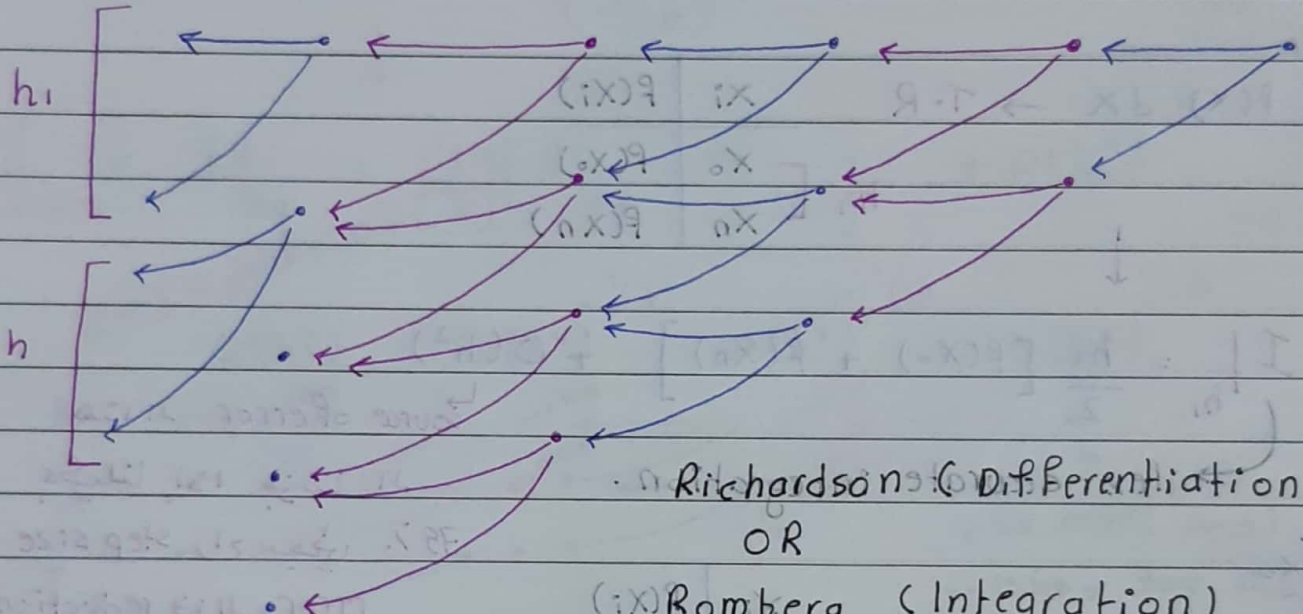


$$\int_1^{15}$$



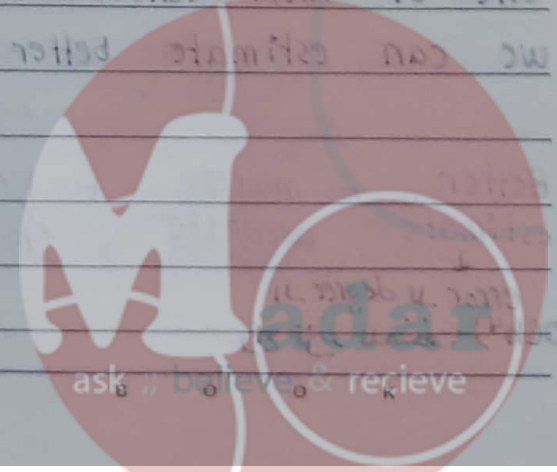
TR $\rightarrow O(h^2)$

h $O(h)$ $O(h^2)$ $O(h^4)$ $O(h^6)$ $O(h^8)$
 ↳ step size ↓ weak



more accurate integration

if you have two estimates for the same integration one of them calculated on a step size of the first we can estimate better estimate.



Romberg Integration :-

طريقة رومبرج

T.R

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \rightarrow T.R$$

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_n	$f(x_n)$

h_1

$$I|_{h_1} = \frac{h_1}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + O(h^2)$$

هذا هو source of error

less accurate integration.

بشكلنا اذا جزيها الى

step size راج يعطي 75 %

error في ال reduction

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \rightarrow T.R$$

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$ → intermediate point
x_2	$f(x_2)$

$h_1/2$

$$I|_{h_1/2 = h_2} = \frac{h_2}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_n)] + O(h^2)$$

more accurate integration.

⇒ if you have two estimates for the same integration one of them calculated on h_a step size of the first we can estimate better estimate.

Better estimate = more accurate + $\frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}$ [more accurate - less accurate]

error degree ال

$O(h^4)$ راج تزيد للمنفك

S T A R S N O T E

ask :: believe & recieve

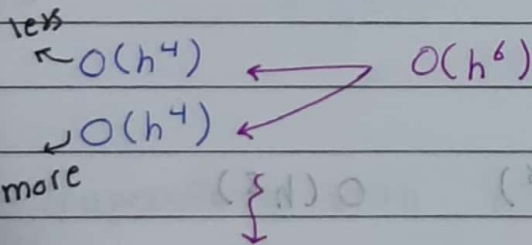
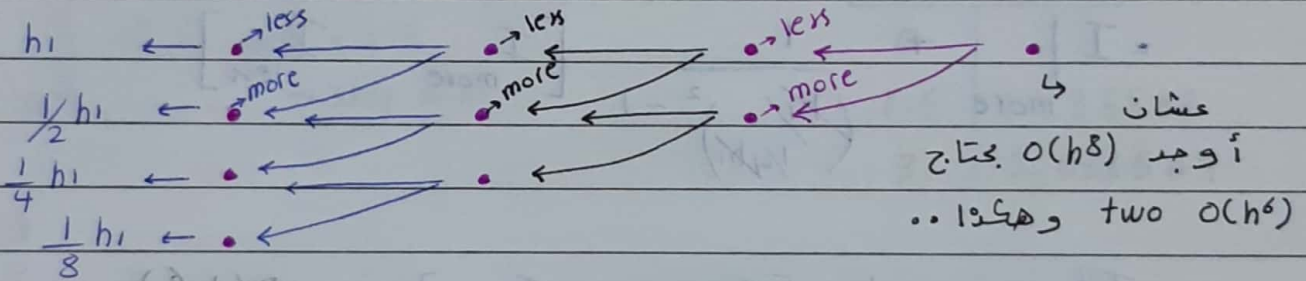
$$I_{\text{best or better}} = I|_{h_2 = \frac{1}{2}h_1} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\frac{1}{2}h_1}\right)^2 - 1} \left[I|_{h_2} - I|_{h_1} \right]$$

more → less

$$I_{\text{Better}} = I|_{h_2} + \left[\frac{1}{3} \right] \left[I|_{h_2} - I|_{h_1} \right] + O(h^4)$$

$O(h^4)$ $O(h^2)$ $O(h^4)$ $O(h^6)$ $O(h^8)$

1/3 1/15 1/63



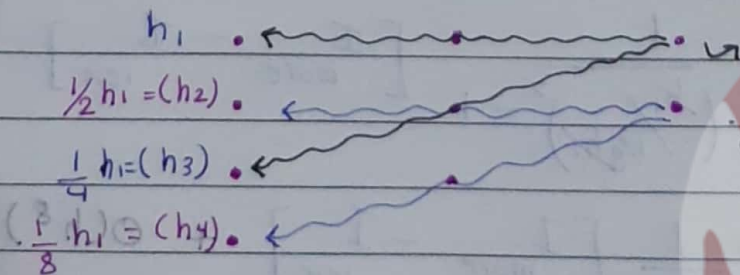
$$I_{\text{better}} = I|_{\text{more}} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} \left[I|_{\text{more}} - I|_{\text{less}} \right]$$

$O(h^4)$ $O(h^4)$

$O(h^6)$

بالتالي اد
Factor
راج يتغير

$O(h^2)$ $O(h^4)$ $O(h^6)$



بلا حظ ان
العلاقة بين
النقطين لي اخذتهم
ببتغير عشان هيل
Factor
ببطل
1/3

$$h_1 = \frac{1}{2} h_2 = \frac{1}{4} h_3$$

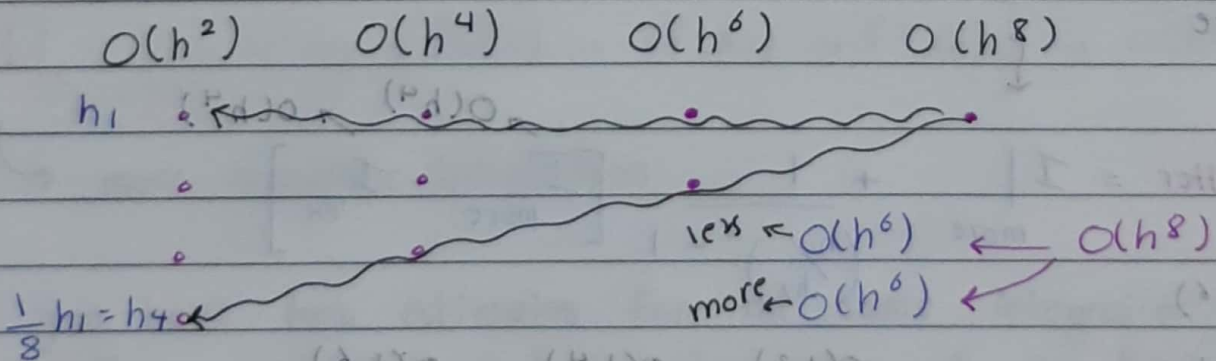
skip
بقيس العلاقة بين
 h_1 & h_3

$$I_{\text{better}} = I_{\text{more}} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 - 1} [I_{\text{more}} - I_{\text{lex}}]$$

$$= I_{\text{more}} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{1/4 h_1}\right)^2 - 1} [I_{\text{more}} - I_{\text{lex}}]$$

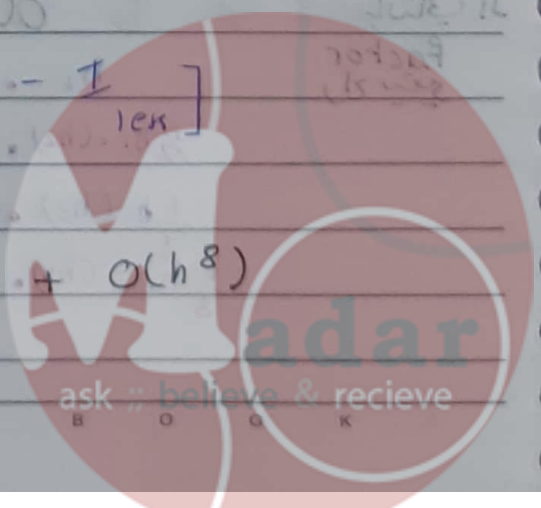
$$= I_{\text{more}} + \frac{1}{15} [I_{\text{more}} - I_{\text{lex}}] + O(h^6)$$

$O(h^8)$



$$I_{\text{better}} = I_{\text{more}} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{1/8 h_1}\right)^2 - 1} [I_{\text{more}} - I_{\text{lex}}]$$

$$= I_{\text{more}} + \frac{1}{63} [I_{\text{more}} - I_{\text{lex}}] + O(h^8)$$



Example :-

$$\int_0^3 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

1 - Trapezoidal with 2 subintervals ?!

لأنه أي راج أجزاء

التي هي 2

with

نتائج التقدير بالافتراض
بمعدل 9.2
مكتمل

$f(x)$: x

$\int_0^3 1.5 \rightarrow h = 1.5$

$\rightarrow$ step size

x_i	$f(x_i)$
0	1
1.5	1.635533
3	3.036589

$$\int_0^3 T.R = \frac{1.5}{2} [1 + 2(1.635533) + 3.036589]$$

$$= 5.480741$$

2 - Trapezoidal with 10 subintervals ?!

لأنه يعني 10 يكون عندي

10 subintervals

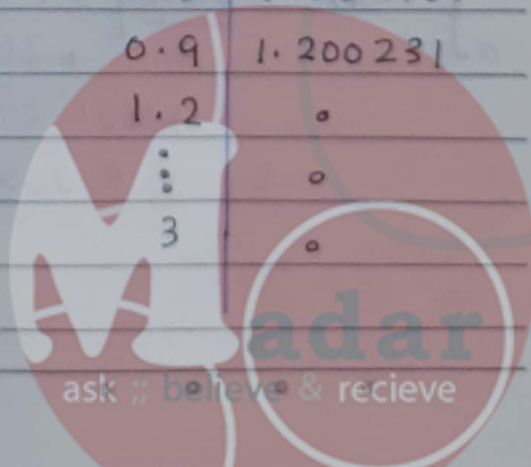
$f(x)$: x

المعدل 11 نقطة

x_i : $f(x_i)$

$\int_0^3 h = \frac{3}{10} = 0.3$

0	1
0.3	1.00892
0.6	1.067361
0.9	1.200231
1.2	•
•	•
•	•
3	•



$$\int_0^3 T.R = \frac{0.3}{2} \left[1 + 2 \{ 1.00892 + 1.067361 + \dots \} + 3.036589 \right]$$

$P(0)$ $P(3)$

$$= 5.27989$$

3- Simpson Rule with 2 subintervals ?

x_i	$P(x_i)$
0	1
1.5	1.635533
3	3.036589

$$\int_0^3 P(x) dx \approx \frac{1.5}{3} \left[P(x_0) + 4P(x_1) + P(x_2) \right]$$

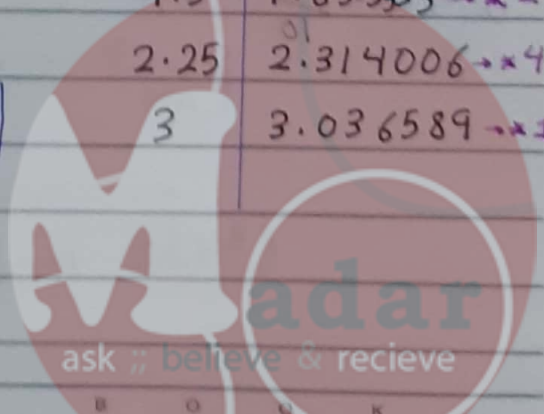
$$= 5.2893605$$

4 subintervals :- (double application of S.R)

x_i	$P(x_i)$
0	1
0.75	1.124485
1.5	1.635533
2.25	2.314006
3	3.036589

$$\int_0^3 P(x) dx \approx \frac{0.75}{3} \left[1 + 3.036589 + 2(1.635533) + 4(1.124485 + 2.314006) \right]$$

$$= 5.265405$$

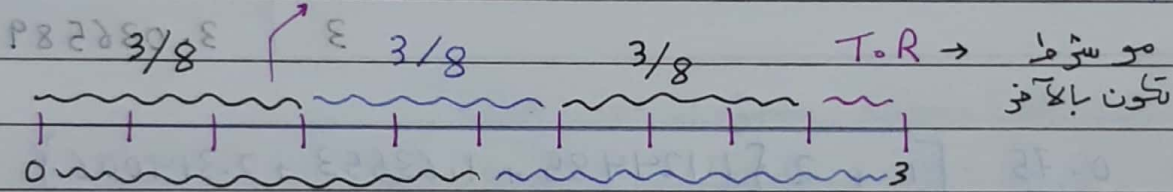


4- Multiple S.R with 10 subintervals

x_i	$f(x_i)$
0	
0.3	
0.6	
0.9	
1	

استعمل 4 نقاط
3/8

من 0 إلى 1
3/8



the best

↓ الأفضل (استعمل)

2 Formula

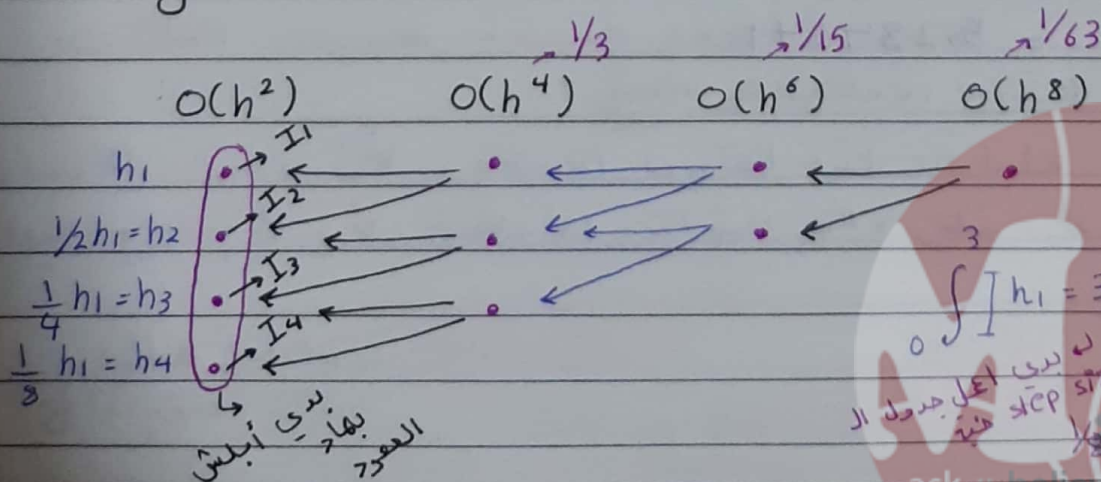
6 data points
↓
من البداية

6 data points
↓
بالأخر

$$I = 5.272462$$

10 sub
↓
استخدام
1/3 S.R

5- Romberg $O(h^8)$



$$I_1 = \frac{3}{2} \left[1 + 3.036589 \right]$$

$h=3$ $P(0)$ $P(3)$

$$= 8.0548835$$

$$I_2 = \frac{1.5}{2} \left[1 + 2(1.63553) + 3.036589 \right]$$

$h=1.5$

$$= 5.480741$$

$$I_3 = \frac{0.75}{2} \left[1 + 2 \{ 1.124485 + 1.63553 + 2.314006 \} + 3.036589 \right]$$

$h=0.75$

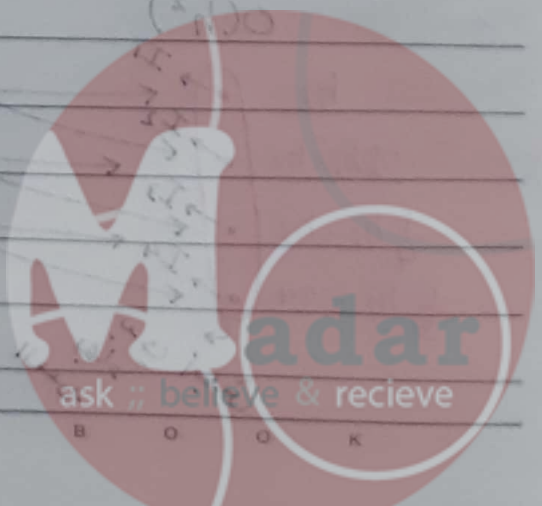
$$= 5.319239$$

$$I_4 = \frac{0.375}{2} \left[1 + 2 \{ 1.017278 + 1.124485 + \dots \} + 3.036589 \right]$$

$h=0.375$

$$= 5.284041$$

x_i	$P(x_i)$
0	1
0.375	1.017278
0.75	1.124485
1.125	
1.5	1.635533
1.875	
2.25	2.314006
2.625	
3	3.036589



Subject: Chapter

12 / 1 / 2021

$O(h^4) :-$

$$\rightarrow 5.480741 + \frac{1}{3} [5.480741 - 6.054883]$$

$$\rightarrow 5.319239 + \frac{1}{3} [5.319239 - 5.480741]$$

$$\rightarrow 5.284041 + \frac{1}{3} [5.284041 - 5.319239]$$

$O(h^6) :-$

$$\rightarrow 5.265405 + \frac{1}{15} [5.265405 - 5.289361]$$

$$\rightarrow 5.272308 + \frac{1}{15} [5.272308 - 5.265405]$$

$O(h^8) :-$

$$\rightarrow 5.272769 + \frac{1}{63} [5.272769 - 5.263808]$$

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
3	6.054883	5.289361	5.263808	5.272911
1.5	5.480741	5.265405	5.272769	
0.75	5.319239	5.272308		
0.375	5.284041			

(0.1875)

0

0.09375

0.0 → 0.0

0.046875

0.0 → 0.0

0.0234375

0.0 → 0.0



Two dimensional interpolation :-

Question 1 :-

y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
x						
0.2	0.7878	0.9622	1.1752	1.4354	1.7532	2.1414
0.4	1.3511	1.6502	2.0155	2.4618	3.0068	3.6726
0.6	1.5511	1.8945	2.3139	2.8262	3.4519	4.2162
0.8	1.3878	1.695	2.0703	2.5287	3.0886	3.7724
1	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183

1 - find the value of $P(0.6, 0.56)$ & $P(0.52, 0.6)$ using a second order Newton's interpolation ?

$$\Rightarrow P(0.6, 0.56)$$

لـ موجودة
بالجدول

غير
موجودة

$$P_2 = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

لـ يحتاج 3
نقاط

بما انو الـ x معروفة

فأنا راح أستعمل على y

لأنها بتغير

y	$P(0.6, y)$
0.2	1.8945
0.4	2.3139
0.6	2.8262
0.8	3.4519

y	$P(0.6, y)$
$y_0 \leftarrow 0.4$	2.3139
$y_1 \leftarrow 0.6$	2.8262
$y_2 \leftarrow 0.8$	3.4519

0.36
0.56
0.24
الفرق أصغر
من باقيها

1st D.D :-

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{2.8262 - 2.3139}{0.6 - 0.4} = 2.5615 \\ & \rightarrow \frac{3.4519 - 2.8262}{0.8 - 0.6} = 3.1285 \end{aligned}$$

2nd D.D :-

$$\rightarrow \frac{3.1285 - 2.5615}{0.8 - 0.4} = 1.4175$$

y	P(0.6, y)	1 D.D	2 D.D
$y_0 \leftarrow 0.4$	$2.3139 \rightarrow a_0$	$2.5615 \rightarrow a_1$	$1.4175 \rightarrow a_2$
$0.56 \rightarrow 0.6$	2.8262	3.1285	
0.8	3.4519		

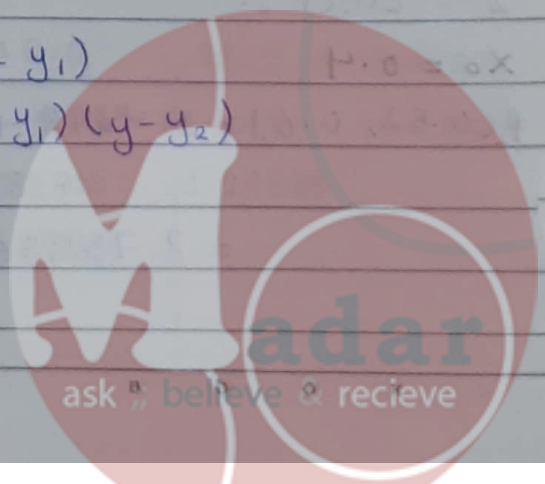
* بياخذ قيم
 a_0, a_1, a_2
 من عند y_0

$$\begin{aligned} f_3 &= P(0.6, 0.56) = 2.3139 + 2.5615(0.56 - 0.4) \\ &+ 1.4175(0.56 - 0.4)(0.56 - 0.6) \\ &= 2.714668 \end{aligned}$$

2 - $P(0.6, 0.56) \rightarrow 3^{\text{rd}}$ order

$$f_3 = a_0 + a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)(y - y_1) + a_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)$$

نحتاج 4 نقاط



y	$F(0.6, y)$	1 D.D	2 D.D	3 D.D
0.2	1.8945 a_0	2.097 a_1	1.16125 a_2	0.427083 a_3
0.4	2.3139	2.5615	1.4175	
0.56 $\rightarrow$	2.8262	3.1285		
0.6	2.8262			
0.8	3.4519			

$\downarrow$

$$F(0.6, 0.56) = 1.8945 + 2.097(0.56 - 0.2) + 1.16125(0.56 - 0.2)(0.56 - 0.4) + 0.427083(0.56 - 0.2)(0.56 - 0.4)(0.56 - 0.6)$$

$$= 2.715325$$

$$\Rightarrow F(0.52, 0.6)$$

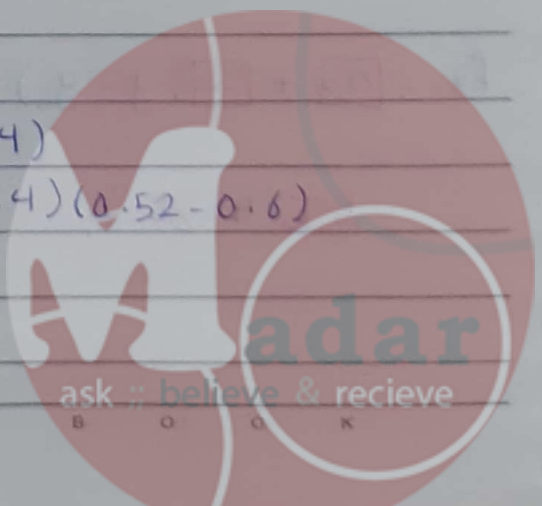
له غير موجودة $\rightarrow$ موجودة

X	$F(X, 0.6)$	1 D.D	2 D.D	3 D.D
0.2	1.4345 $\rightarrow a_0$	5.1365 $\rightarrow a_1$	8.28625 $\rightarrow a_2$	0.020833 $\rightarrow a_3$
0.4	2.4618 $\rightarrow a_0$	1.822 $\rightarrow a_1$	8.27375 $\rightarrow a_2$	
0.52 $\rightarrow$	2.8262	1.4875		
0.6	2.8262			
0.8	2.5287			

2nd order :-

$$x_0 = 0.4$$

$$F_2(0.52, 0.6) = 2.4618 + 1.822(0.52 - 0.4) - 8.27375(0.52 - 0.4)(0.52 - 0.6) = 2.759868$$



3rd order :-

$$x_0 = 0.2$$

$$f_3(0.52, 0.6) = 1.4345 + 5.1365(0.52 - 0.2)(0.52 - 0.4) + 8.28625(0.52 - 0.2)(0.52 - 0.4) + 0.020833(0.52 - 0.2)(0.52 - 0.4)(0.52 - 0.6) = 2.759924$$

3- Find the value of $f(0.52, 0.56)$ & using Newton's interpolation, use a second order in x-direction & third order in the y-direction!

$$f(0.52, 0.56)$$

راج ناخذ جى من الجدول
لي يتطابق النقاط
لي عنا

	0.2	0.4	0.6	0.8
0.4	1.6502	2.0155	2.4618	3.0068
0.52	1.8945	2.3139	2.8262	3.4519
0.8	1.695	2.0703	2.5287	3.0886

نه عشان اوجد
حيث كل وحدة
لازم نكمل حيت
اعلى جدول الـ y
اكثر من جدول الـ x

أثبت ان
فأشغل بال
أد العكس
مباين

Keep x constant &

change y :-

$$x = 0.4$$

y	$f(0.4, y)$	10.0	20.0	30.0
0.2	1.6502	1.8265	1.0125	0.36875
0.4	2.0155	2.2315	1.23375	
0.6	2.4618	2.725		
0.8	3.0068			

Subject: Chapter 5

13/1/2022

$$X = 0.6$$

y	$F(0.6, y)$	1 D.D	2 D.D	3 D.D
0.2	1.8945	2.097	1.16125	0.427083
0.4	2.3139	2.5615	1.4175	
0.6	2.8262	3.1285		
0.8	3.4519			

Find the value of $F(0.5, 0.5)$ using the value of $F(0.6, y)$ in the direction of interpolation, use a second order of interpolation.

y	$F(0.8, y)$	1 D.D	2 D.D	3 D.D
0.2	1.695	1.8765	1.03875	0.383333
0.4	2.0703	2.292	1.26875	
0.6	2.5287	2.7995		
0.8	3.0886			

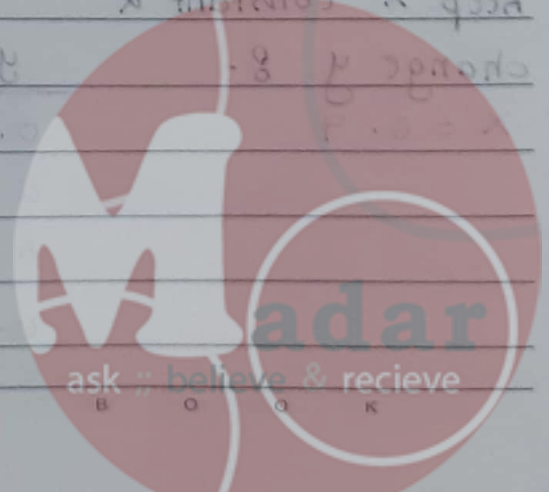
$$F(0.4, 0.56) = 2.36521$$

$$F(0.6, 0.56) = 2.715324$$

$$F(0.8, 0.56) = 2.429489$$

X	$F(X, 0.56)$	1 D.D	2 D.D
0.4	2.36521	1.750568	-7.94936
0.6	2.715324	-1.42918	
0.8	2.429489		

$$F(0.52, 0.56) = 2.651592$$



Numerical integration:-

Question 1 :-

$$\text{mass } M = \int_{t_1}^{t_2} Q \cdot c \, dt$$

t_2 → Final time
 t_1 → initial time
 Q → concentration
 $12 \text{ m}^3/\text{min}$

$\Delta X = 2$

t (min)	0	2	4	6	8	12	16	20
c (mg/m ³)	10	20	30	40	60	72	70	50

$\frac{1}{3} \text{ S.R.}$ $\frac{1}{3} \text{ S.R.}$ $\frac{3}{8} \text{ S.R.}$

1 - Trapezoidal ?!

$$\int_0^8 + \int_8^{20}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} c \, dt = \frac{2}{2} [10 + 2\{20 + 30 + 40\} + 60] + \frac{4}{2} [60 + 2\{72 + 70\} + 50] =$$

$$M = 12 * 1038 = 12456$$

$$F.D. \cdot 508.51 = M$$

2 - Simpson ?!

$$12 \int_{t_1}^{t_2} c \, dt = \int_0^4 \frac{1}{3} \text{ S.R.} + \int_4^8 \frac{1}{3} \text{ S.R.} + \int_8^{20} \frac{3}{8} \text{ S.R.}$$



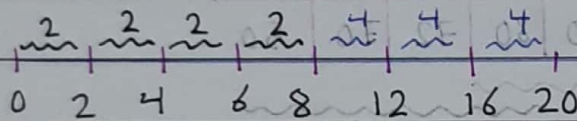
$$= \frac{2}{3} [10 + 4(20 + 40) + 2(30) + 60] + \frac{3 \times 4}{8} [60 + 3(72 + 70) + 50]$$

$$\int_0^8$$

$$\int_8^{20}$$

$$\mu = 12608$$

3 - best ?!



Boole's

$$\int_8^{20} \frac{3}{8} S.R$$

$$\int_0^8 \text{Boole's} + \int_8^{20} \frac{3}{8} S.R$$

$$= \frac{(8-0)}{90} [7(10) + 32(20) + 12(30) + 32(40) + 7(60)]$$

$$+ \frac{3}{8} (4) [60 + 3(72 + 70) + 50]$$

$$\mu = 12602.67$$



Numerical Differentiation :-

Question 1 :-

t (min)	0	15	30	45	60	90	120
$v, 10^6$ barrels	0.5	0.65	0.72	0.88	1.03	1.14	1.30

Calculate the Flow rate $Q(dv/dt)$ For each time t .
 use Forward, backward & central formulas of the same order of errors.

Forward $\rightarrow$ بقدر استعملها $\rightarrow 0, 15, 30, 60$

لأن كل واحد منهم وراها نقطتين المهم نفس
 step size.

Backward $\rightarrow$ بقدر استعملها $\rightarrow 30, 45, 60, 120$

لأن كل واحد منهم قبلها نقطتين المهم نفس
 step size.

central $\rightarrow$ بقدر استعملها $\rightarrow 15, 30, 45, 90$

لأن كل واحد بين نقطتين المهم نفس
 step size.



time

v

0

0.5

15

0.65

30

0.73

45

0.88

60

1.03

90

1.14

120

1.3

Forward $O(h^2)$:-

$$\hat{P}(x_i) = \frac{-P(x_{i+2}) + 4P(x_{i+1}) - 3P(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

$$\hat{P}(0) = \frac{-0.73 + 4(0.65) - 3(0.5)}{2(15)} =$$

$$\hat{P}(15) = \frac{-0.88 + 4(0.73) - 3(0.65)}{2(15)} =$$

$$\hat{P}(30) = \frac{-1.03 + 4(0.88) - 3(0.73)}{2(15)} =$$

$$\hat{P}(60) = \frac{-1.3 + 4(1.14) - 3(1.03)}{2(30)} =$$

Backward $O(h^2)$:-

$$\hat{P}(x_i) = \frac{3P(x_i) - 4P(x_{i-1}) + P(x_{i-2}))}{2h} + O(h^2)$$

$$\hat{P}(30) = \frac{3(0.73) - 4(0.65) + 0.5}{2(15)} =$$

$$\hat{P}(45) = \frac{3(0.88) - 4(0.73) + 0.65}{2(15)}$$

$$\hat{P}(60) = \frac{3(1.03) - 4(0.88) + 0.73}{2(15)}$$

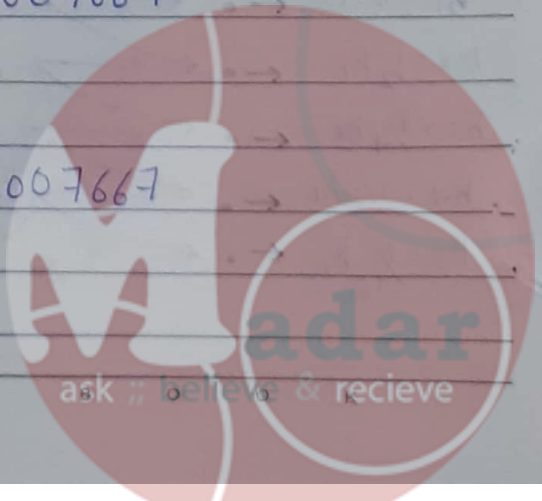
$$\hat{P}(120) = \frac{3(1.3) - 4(1.14) + 1.03}{2(30)}$$

Central $O(h^2)$:-

$$\hat{P}(x_i) = \frac{P(x_{i+1}) - P(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$\hat{P}(15) = \frac{0.73 - 0.5}{2(15)} + O(h^2) = 0.007667$$

$$\hat{P}(30) = \frac{0.88 - 0.65}{2(15)} + O(h^2) = 0.007667$$



$$\hat{P}(45) = \frac{1.03 - 0.73}{2(15)} + O(h^2) = -0.01$$

$$\hat{P}(90) = \frac{1.3 - 1.03}{2(30)} + O(h^2) = 0.0045$$

Question 2 :

Using Richardson extrapolation Find the first derivative of the following function at $x=2.3$ using the forward formula & a step size of 0.15

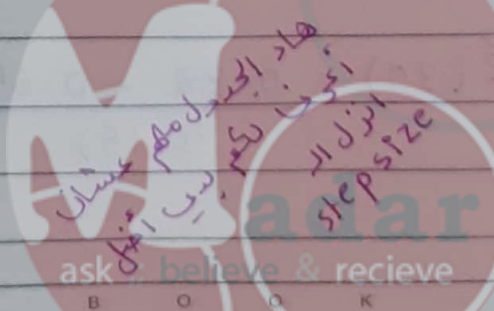
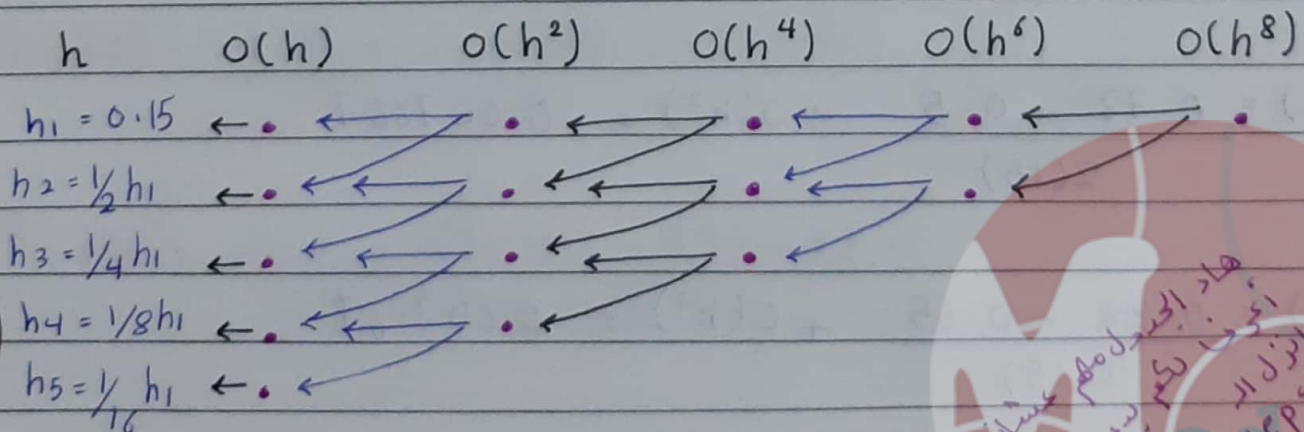
$$f(x) = \ln(x) \sin(\sqrt{2}x)$$

The order of error is $O(h^8)$. Compare your answer with the analytical answer :-

$$\hat{P}(2.3) = \ln(x) \sin(\sqrt{2}x), h = 0.15$$

Forward $\Rightarrow$

$$\hat{P}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$



→ common step size :-

$\frac{1}{16} \times h_1 = \frac{0.15}{16} =$	X	$P(X_i)$
	$X_i = 2.3$	$\ln(2.3) \sin(\sqrt{2(2.3)})$
	$2.3 + 0.15/16$	0
	$2.3 + 0.15/8$	0
	$2.3 + 0.15/4$	0
	$2.3 + 0.15/2$	0
	$2.3 + 0.15$	0

بیشتر

2.3

$h_1 = 0.15$

Forward

h_2

2.45 ← فصل آخری

2.45 ما ارسلا

X	$P(X)$
$X_0 \leftarrow 2.3$	0.699439
2.309375	0.700864
2.31875	0.702247
2.3375	0.704885
2.375	0.70966
2.45	0.717248

$h = 0.15$

X_{i+1}

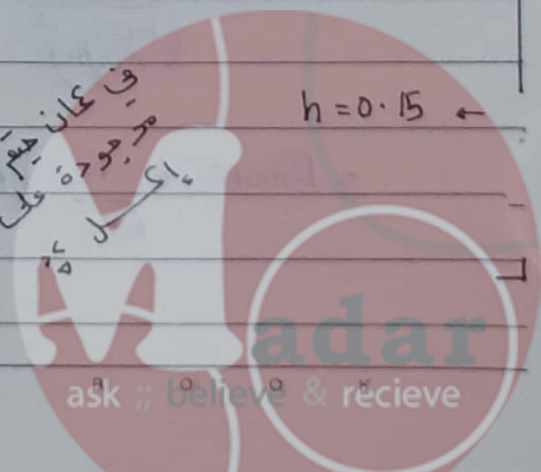
$h = \frac{0.15}{8}$

$h = \frac{0.15}{4}$

$h = \frac{0.15}{2}$

$h = 0.15$

في عمان حيدر
موجوده علي



Richardson :-

$$D_{\text{best}} = D_{\text{more}} + \frac{1}{(h_1/_{1/2}h_1)^2 - 1} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}]$$

$$h_1 = 1/2 h_1 \Rightarrow$$

$$D_{\text{best}} = D_{\text{more}} + \frac{1}{(h_1/_{1/2}h_1)^2 - 1} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}]$$

$$= D_{\text{more}} + \frac{1}{3} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}] \quad O(h^2)$$

$$h_1 = 1/4 h_1 \Rightarrow$$

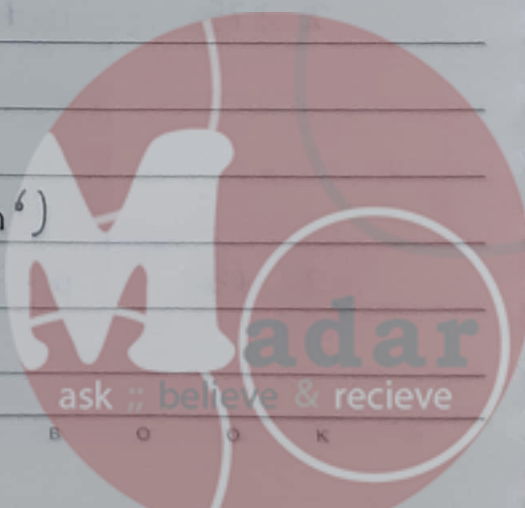
$$D_{\text{best}} = D_{\text{more}} + \frac{1}{(h_1/_{1/4}h_1)^2 - 1} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}]$$

$$= D_{\text{more}} + \frac{1}{15} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}] \quad O(h^4)$$

$$h_1 = 1/8 h_1 \Rightarrow$$

$$D_{\text{best}} = D_{\text{more}} + \frac{1}{(h_1/_{1/8}h_1)^2 - 1} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}]$$

$$= D_{\text{more}} + \frac{1}{63} [D_{\text{more}} - D_{\text{lex}}] \quad O(h^6)$$



$$h_1 = \frac{1}{16} h_1$$

$$D_{best} = D_{more} + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{\frac{1}{16}h_1}\right)^2 - 1} [D_{more} - D_{lex}]$$

$$= D_{more} + \frac{1}{255} [D_{more} - D_{lex}] \quad O(h^8)$$

h	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$h_1 = 0.15$	0.118725	0.142126	0.148593	0.151468	0.152865
$h_2 = 0.075$	0.136276	0.148189	0.151423	0.15286	
$h_3 = 0.0375$	0.145211	0.15122	0.152837		
$h_4 = 0.01875$	0.149718	0.152736			
$h_5 = 0.009375$	0.151982				

لو بيدي أحل السؤال على الـ
central بيلش من $O(h^2)$

